Rappresentazione di informazioni NUMERICHE (N)

Un esempio "storico": i numeri ROMANI

- Non c'è lo Ø
- I numeri vengono ottenuti concatenando lettere I, V, X, L, C, D, M
- L'ispirazione è di tipo decimale, basata su 1, 5, 10 ....
- La successione di VALORI NON CRESCENTI è additiva XII 10+1+1
  (VLD non si ripetono)
- Un valore minore (I, X, C sono gli unici ammessi) precedente uno maggiore sottrae
- Per cifre maggiori ci sono i MOLTIPLICATORI

  $\bar{X}$ · per 1000

  $|\bar{X}|$ per 100 000

  $\bar{\bar{X}}$ per 1000 000

Riflessione : complicato
difficile da usare negli algoritmi base di somma e prodotto
non univocità RAPPRESENTATO —> RAPPRESENTAZIONE

p. es: $|\bar{D}|$ = 50 000 000 500 × 100,000

$\bar{L}$ = 50 000 000 50 × 1000,000

non prevista rappresentazioni per numeri fuori del range

Le notazioni POSIZIONALI

- Si parte da un insieme finito di B simboli (B = base) associati ai valori 0, 1 ... , B-1
- Per rappresentare più valori, si usano n-uple di simboli (coppie, terne, ecc.) coprendo in questo modo B^2, B^3 ... B^n valori diversi
- Per ordinare i valori rappresentati, si collocano i simboli in modo "ordinato" su una linea, da DX a SX

  $\{ S_{n-1} \ldots S_2\ S_1\ S_0 \} \leftarrow n$ simboli

  PESO

- Si parte da tutti i simboli nulli. Si assume i restanti B-1 valori successivi. Poi riparte dal valore nullo, incrementando il simbolo di PESO superiore, fino a quando anche questo arriva a B-1 ... e così via

Relazione tra rappresentazione e rappresentato

- Sulla base del meccanismo di ordinamento, si risale subito alla relazione

$$x = X_{m-1} B^{m-1} + X_{m-2} B^{m-2} \dots + X_1 B + X_0$$

x: valore rappresentato

X_i : simboli o CIFRE della rappresentazione

B : base della rappresentazione

B^i : peso della cifra X_i nella rappresentazione

- la nostra comune numerazione usa $B = 10$ (abbiamo 10 dita ...). Possono avere interesse altre basi. Nelle nostre architetture è facile implementare sistemi con soli 2 simboli. Considereremo $B = 2$; $B = 8$; $B = 16$.

Operazioni tra numeri rappresentati con notazione POS.

SOMMA

- Esaminiamo la somma tra 2 cifre. Il range del risultato sarà tra.

$R_i = X_i + Y_i$ $\qquad 0 \leq R \leq 2B-2$

Avremo quindi 2 casi $0 \leq R \leq B-1$ il risultato sarà espresso con una cifra dello stesso peso

$B \leq R \leq 2B-2$ essendo $R \geq B$ possiamo scrivere $R = R' + B$ con $0 \leq R' \leq B-2$

- Possiamo TABELLARE il risultato di tutte le possibili somme tra 2 cifre. (uso come simboli le cifre arabe)

$B = 6$ (per esempio)

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	10
2	2	3	4	5	10	11
3	3	4	5	10	11	12
4	4	5	10	11	12	13
5	5	10	11	12	13	14

(Si può aggiungere CARRY)

In ROSSO i casi con $R \geq B$

- Se la somma di 2 cifre $\geq B$, dobbiamo aumentare di 1 il valore della cifra di peso immediatamente superiore

  — RIPORTO carry

- Anche considerando l'eventuale RIPORTO, la somma di 2 cifre + Riporto_{in} ha range $0 \leq R \leq B-1$ e sarà esprimibile con 1 cifra + Riporto_{out}

riporti delle somme delle cifre

$$
\begin{array}{llcccccc}
 & & C_{n-1} & & C_2 & C_1 & & \\
\text{addendo} & \rightarrow & X_{n-1} & \dots & X_2 & X_1 & X_0 & + \\
\text{addendo} & \rightarrow & Y_{n-1} & & Y_2 & Y_1 & Y_0 & \\
\hline
C_{out} & & R_{n-1} & & R_2 & R_1 & R_0 &
\end{array}
$$

cifre del risultato

eventuale riporto finale

- NOTA: VALE PER OGNI BASE

DIFFERENZA

- Si può affrontare con una (borrow) tecnica simile, introducendo l'idea di PRESTITO quando la cifra del MINUENDO non copre la somma tra prestito richiesto e SOTTRAENDO.

- Segue esempio con $B=6$

MINUENDO

SOTTRAENDO + PRESTITO event.	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	B5	0	1	2	3	4
2	B4	B5	0	1	2	3
3	B3	B4	B5	0	1	2
4	B2	B3	B4	B5	0	1
5	B1	B2	B3	B4	B5	0
5+1	B0	B1	B2	B3	B4	B5

prestiti dalle diff. preced.

$$
\begin{array}{llccccc}
 & & B_{n-1} & \text{-----} & B_1 & & \\
\text{minuendo} & \rightarrow & X_{n-1} & \text{-----} & X_1 & X_0 & - \\
\text{sottraendo} & \rightarrow & Y_{n-1} & \text{-----} & Y_1 & Y_0 & \\
\hline
B_{out} & & R_{n-1} & \text{-----} & R_1 & R_0 &
\end{array}
$$

eventuale prestito finale di peso B^n

differenza cifre $X-(Y+B)$

MOLTIPLICAZIONE

- Esaminiamo il risultato del prodotto

$$(x_2 B^2 + x_1 B + x_0)(y_2 B^2 + y_1 B + y_0) = x_0 y_0 + (x_1 y_0 + x_0 y_1) B +$$
$$+ (x_2 y_0 + x_1 y_1 + x_0 y_2) B^2 + (x_2 y_1 + x_1 y_2) B^3 + x_2 y_2 B^4$$

- Osserviamo che nel risultato ci sono i prodotti tra le cifre (che tabelleremo in una TABELLA PITAGORICA) che andranno sommati secondo i pesi relativi

- Esemplifichiamo ancora con $B = 6$

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	10	12	14
3	0	3	10	13	20	23
4	0	4	12	20	24	32
5	0	5	14	23	32	41

- Ora possiamo individuare l'algoritmo

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & x_{n-1} & & & x_1 & x_0 & \times \\
 & & y_{n-1} & & & y_1 & y_0 & \\
\hline
 & & \overset{R_{0,n-2}}{y_0 x_{n-1}} & & \overset{R_{0,1}}{y_0 x_2} & \overset{R_{0,0}}{y_0 x_1} & y_0 x_0 & \\
 & \overset{R}{y_1 x_{n-1}} & y_1 x_{n-2} & & \overset{R}{y_1 x_1} & y_1 x_0 & - & \\
y_2 x_{n-1} & y_2 x_{n-2} & y_2 x_{n-3} & & y_2 x_0 & - & - & \\
\hline
R_{2n-1} \cdots R_{n+1} & R_n & R_{n-1} & & R_2 & R_1 & R_0 &
\end{array}$$

può avere riporto secondo tabella

- Range $0 .. (B^n - 1)(B^n - 1) = B^{2n} - 2B^n + 1$
quindi $2n$ cifre

$$B^{2n-1} - 1 < B^{2n} - 2B^n + 1 < B^{2n} - 1 \qquad (\forall B, n)$$

infatti

$$B^{2n} - B^{2n-1} - 2B^{n} + 2 = B^{n}\left(B^{n} - B^{n-1} - 2\right) + 2 =$$

$$= B^{n}\left[B^{n-1}(B-1) - 2\right] + 2 > \phi \qquad \forall\ B \geq 2 ;\ \forall\ n \geq 2$$

crescente con B e con n

quindi il minimo si ha per $n = 2$; $B = 2$

$$4\left[2 \cdot 1 - 2\right] + 2 = 2 > \phi$$

se $n = 1$ e $B = 2$ (1 cifra binaria) il prodotto è su 1 cifra $\{0 \cdot 0 = 0 ;\ 0 \cdot 1 = 0 ;\ 1 \cdot 0 = 0 ;\ 1 \cdot 1 = 1\}$