Rappresentazione di numeri RAZIONALI $\mathbb{Q}$ #5.1

I numeri FRAZIONALI

- A volte si vogliono rappresentare grandezze che sono o contengono frazioni dell'unità. Si può sempre arrivare per un razionale a espressioni del tipo

$$x = \frac{a}{b} = q + \underbrace{\frac{r}{b}}_{\text{minore dell'unità}} \quad \text{con} \quad r < b \quad e \quad q \text{ intero}$$

- A questo scopo si possono usare pesi in una data base B con esponente negativo

$$x = \overbrace{B^{n-1} X_{n-1} \cdots + B X_1 + X_0}^{q} + B^{-1} X_{-1} + \cdots B^{-f} X_{-f}$$

n cifre per la parte intera
f cifre per la parte frazionale

- Quale range può rappresentare la parte frazionale?
  - al minimo $\emptyset$
  - al massimo $(B-1) \sum_1^f i \left(\frac{1}{B}\right)^i$ (somma di serie geometrica)

  quindi

$$(B-1)\left[\frac{1-\left(\frac{1}{B}\right)^{f+1}}{1-\frac{1}{B}} - 1\right] = \cancel{(B-1)} \cdot \frac{\cancel{B} - (1/B)^f - \cancel{B} + 1}{\cancel{(B-1)}} = 1-(1/B)^f$$

cioè fino a quasi 1 (basta aumentare f)

- Si riesce a trovare f per rappresentare qualsiasi frazione?
  - non sempre in modo esatto
  - ma sempre con un errore piccolo a piacere

La prima parte si dimostra facilmente.
Se esiste rappresentazione esatta

$$B^{-f}\left(B^{f-1} X_{-1} + B^{f-2} X_{-2} + \cdots + X_{-f}\right) = \frac{r}{b} \quad \text{allora}$$

$$B^f r = \left(B^{f-1} X_{-1} + \cdots X_{-f}\right) b \quad \text{da cui} \quad |B^f r|_b = \emptyset$$

ma se i fattori primi di b non sono contenuti in quelli di $B^f r$, qualsiasi sia f (che non può aggiungere nuovi fattori primi, ma solo aumentare il grado di quelli presenti), l'ultima conclusione è FALSA.

#5.2

- la seconda parte si dimostra trovando una successione di cifre (periodica) che converge al valore desiderato (nel caso in cui NON esiste rappresentazione esatta)

infatti, al variare di f, i valori ottenuti da

$$|B^f r|_b = r_f$$

dovranno dare dopo un $f < b-1$ un valore già dato in precedenza (sono in numero FINITO i possibili risultati), sia r_k

Da lì in poi i risultati si ripetono, infatti è

$$|B^{f+1} r|_b = |B \cdot |B^f r|_b|_b = |B \cdot |B^k r|_b|_b = r_{k+1} \quad \text{e così via}$$

Si ha perciò

$$|r|_b = r$$

$$|Br|_b = r_1$$

$$|B^2 r|_b = r_2$$

$$\left.\begin{array}{l} |B^k r|_b = r_k \\ |B^{k+1} r|_b = r_{k+1} \\ \vdots \end{array}\right\} (f-k) \text{ valori che si ripetono}$$

$$|B^f r|_b = r_k \qquad \text{con } f < b-1 \qquad (\text{non c'è lo } \phi)$$

$$|B^{f+1} r|_b = r_{k+1}$$

$$\vdots$$

e così via, all'infinito

Stando così le cose, la successione che converge al valore $r/b < 1$ è data da

$$x_{-1} = \frac{Br - r_1}{b}$$

$$x_{-2} = \frac{Br_1 - r_2}{b}$$

$$\vdots$$

$$x_{-k} = \frac{Br_{k-1} - r_k}{b}$$

questo gruppo si ripete

$$\left\{\begin{array}{l} x_{-k-1} = \dfrac{Br_k - r_{k+1}}{b} \\ \vdots \\ x_{-f-1} = \dfrac{Br_k - r_{k+1}}{b} = x_{-k-1} \end{array}\right.$$

*

- Interessante osservare che, nota la struttura del numero "periodico" è possibile ricostruire il valore esatto del razionale come somma di serie geometrica.

$$x = q + f_1 B^{-k} + B^{-k} \sum_{1}^{\infty} f_2 B^{(k-f)i}$$

ove f_1 è il numero composto dalle cifre PRIMA della parte periodica
f_2 è il numero composto dalla parte periodica

$$x = q + f_1 B^{-k} + B^{-k} f_2 \left(\frac{1}{1 - B^{k-f}} - 1 \right) =$$

$$= q + \frac{f_1}{B^k} + \frac{f_2}{B^k} \cdot \frac{\cancel{B^{f-k}} - \cancel{B^{f-k}} + 1}{B^{f-k} - 1} = q + \frac{f_1}{B^k} + \frac{f_2}{B^f - B^k}$$

> A titolo di esempio, valutiamo $x = 6,34\overline{21}$ $\quad k=2$, $f=4$

$$x = 6 + \frac{34}{100} + \frac{21}{9900}$$

> Oppure, in base 2, $x = 0,0\overline{0011}$ $\quad k=1$, $f=5$

$$x = 0 + \frac{3}{32-2} = 0,1$$

Conseguenze

- Avendo un numero di cifre finite, sarà necessario usare strategie di APPROSSIMAZIONE

- Le conversioni di BASE tra numeri frazionali non presentano reciprocità. Per esempio

  Un frazionale BINARIO ha sempre una rappresentazione DECIMALE esatta (10 contiene 2)

  $\frac{1}{2} = 0{,}5 \qquad \frac{1}{4} = 0{,}25 \qquad \frac{1}{8} = 0{,}125 \quad \ldots$

  non è vero il viceversa

  $\frac{1}{10} = (0{,}0\overline{0011})_2$

Approssimazione di frazionali : TRONCAMENTO $\hat{x}$

- Quando si rappresenta con un numero di cifre finite una serie infinita di frazionali, o anche solo la somma di un numero di frazionali superiore a quelli disponibili, si commette un ERRORE.

- Una strategia consiste nel TRASCURARE le cifre da un certo peso (fraz) in poi

$$x = \underbrace{B^{n-1}x_{n-1} \cdots + x_0 + B^{-1}x_{-1} \cdots + B^{-f}x_{-f}}_{\hat{x}} + \Big| \overbrace{\cdots \text{ cifre trascurate}}^{\varepsilon}$$

- In questo caso l'errore $(\hat{x} - x)$ è sempre negativo e si ha

$$\emptyset \leq |\varepsilon| < B^{-f}$$

- nel caso di rappresentazioni $\mathbb{Z}$ l'affermazione è vera sempre per C1, C2 e T mentre per MS l'errore è sul MODULO quindi se $x < \emptyset$ $(\hat{x} - x)$ è positivo

ARROTONDAMENTO $\tilde{x}$

- Una diversa strategia potrebbe essere quella di scegliere il valore rappresentabile più vicino, in modo proprio da minimizzare $|\tilde{x} - x|$.

- Esaminiamo i casi che si possono avere a partire dal troncamento

$|\hat{x} - x| < \frac{B^{-f}}{2}$ arrotondamento e troncamento coincidono $\tilde{x} = \hat{x}$

$|\hat{x} - x| > \frac{B^{-f}}{2}$ conviene approssimare usando il codice SUCCESSIVO (potrebbe aversi OF)

$\tilde{x} = \hat{x} + 1$

Infine se

$|\hat{x} - x| = \frac{B^{-f}}{2}$ siamo esattamente A METÀ tra due parole adiacenti e l'errore in modulo è lo STESSO

POSSIAMO scegliere

1) $\tilde{x} = \hat{x} + 1$

2) $\tilde{x} = \hat{x}$

- La scelta 1) è la più comune, in quanto è la più facile da implementare (se $x_{-f-1} \geq B/2$ si arrotonda al successivo)

- L'adozione sistematica di 1) applicata a misure distribuite uniformemente comporta un errore medio NON nullo - Sistematicamente si introduce un errore con offset positivo

  > supponiamo di dover arrotondare numeri che rappresentano misure con 3 cifre frazionali (in base 10) su 1 sola cifra

0	0,000
−0,001	0,001
+0,050	0,050 ← questo caso si presenta con probabilità 10^{-2}
0,001	0,99
0	⋮

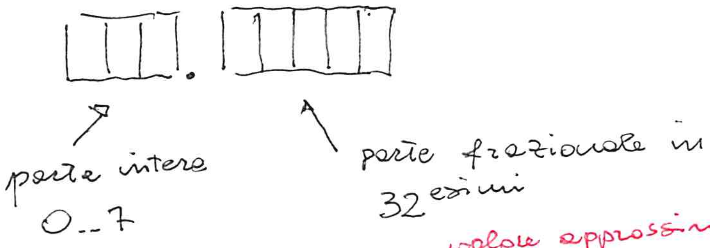
$\langle \varepsilon \rangle = 0{,}050 \cdot 10^{-2}$ gli altri si elidono a vicenda, se equiprobabili

- RIMEDIO: approssimare "a caso" - Per esempio al n° PARI più vicino

Notazioni

- I frazionali rappresentati in questo modo si dicono NUMERI in VIRGOLA FISSA

  Per esempio, in binario, 3.5 significa



valore approssimato

- L'errore ASSOLUTO $|\hat{x} - x|$ ha un range costante

  se troncamento $0 \leq |\varepsilon| < \frac{1}{32}$

  se arrotondamento (classico) $-\frac{1}{64} < \varepsilon \leq \frac{1}{64}$