Il problema della robustezza di un codice (rivelazione e correzione di errori)

Rivelazione di errori e distanza tra codici

- In un sistema DIGITALE il rumore non "degrada" l'informazione fino a quando non produce un ERRORE.
  - Un "elemento" di informazione si trasforma in un altro
  - Nei sistemi binari, un bit cambia da $\emptyset$ a 1 o viceversa.

- In una rappresentazione binaria posizionale, un errore avrà sempre un effetto sul valore rappresentato
  - e questo effetto sarà tanto maggiore quanto maggiore è il PESO del bit sbagliato!

- Se i nostri codici sono un SOTTOINSIEME proprio di tutti i codici possibili con quel numero di bit, PUÒ DARSI che un errore trasformi un codice VALIDO in uno NON VALIDO. In questo caso possiamo RIVELARE l'errore
  - Definiamo distanza tra due codici il n° di bit che è necessario cambiare per trasformare un codice nell'altro.

osserviamo che sono soddisf. tutte le propr.

Proprietà di una distanza tra due "cose"

$d(c_1, c_2) \geq \emptyset$

$d(c_1, c_2) = \emptyset \iff c_1 = c_2$ distanza nulla $\iff$ identità tra elem.

$d(c_1, c_2) = d(c_2, c_1)$ simmetria

$d(c_1, c_2) \leq d(c_1, c_3) + d(c_2, c_3)$ diseg. triangolare

  - Per poter rivelare OGNI POSSIBILE SINGOLO errore, ciascun codice deve avere distanza $M \geq 2$ da ogni altro

se D è il numero di errori rilevabili in ogni caso, in generale

$D = M - 1$ ove $M = \min\{d(c_i, c_j)\} \ \forall i \neq j$

- Per aumentare la distanza tra codici POSSIAMO AGGIUNGERE dei bit ridondanti (rispetto all'informazione) allo scopo di rendere ROBUSTO un codice

La PARITÀ

- Possiamo aggiungere 1 bit a ogni codice facendo in modo che il NUMERO TOTALE di 1 del "codice integrato" sia sempre
  - PARI (parità pari)
  - DISPARI (parità dispari)

Prendiamo alcuni codici ASCII e aggiungiamo un bit di PARITÀ PARI

	code	P	# bit totali 1
'1'	011 0001	1	4
'a'	110 0001	1	4
'W'	1010111	1	6
':'	0111010	0	4

ecc.

- Il "codice integrato" con parità presenta $M = 2$
  Quindi ogni errore SINGOLO sarà rilevabile.

- In generale questa tecnica permette di rilevare un numero DISPARI (1, 3, 5 ecc) di errori, mentre non rileva numeri PARI (2, 4, ecc) di errori.
  Naturalmente interessa poco rivelare 3 errori se le coppie di errori ci sfuggono.

Correzione di errori

- Se $M > 2$, un singolo errore ci porterà in un codice NON VALIDO che però è più vicino al codice corretto di ogni altro codice valido.
  - Supponendo che la probabilità di n errori multipli decresca rapidamente con n
  - Possiamo CORREGGERE l'errore ripristinando il CODICE VALIDO più VICINO a quello errato.

- Esempio di uso della parità per codici di 9 bit

0	1	0	1
1	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0

aggiungo parità pari

- Sono passato a $9 + 7 = 16$ bit
- Sono in grado di rivelare <u>sempre</u> 3 errori
- Posso correggerne 1 facilmente