PARTE II

#10.1

Elettronica
Sistemi Digitali

06. L'algebra di Boole

Roberto Roncella

Algebra della logica

- George Boole
  - Matematico inglese (1815-1864)
- Algebra della logica, o booleana
  - Sistema matematico formale utile per modellare processi logici, relazioni tra insiemi, ecc.
  - Come tutte le algebre, richiede alcune cose
    - Un insieme di elementi e di operazioni
    - Un gruppo di postulati, coerenti e indipendenti
    - Regole di deduzione per dimostrare i teoremi
      - È un passaggio molto delicato, quando si pretende di formalizzare un processo logico!

"An investigation of THE LAWS OF THOUGHT, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities" 1853

#10.2

Regole di deduzione (1)

- Si usa il metodo deduttivo universalmente usato in matematica
  - Si parte da alcune espressioni accettate come evidenti, senza dimostrazione
    - Detti postulati o assiomi
  - Si costruiscono nuove espressioni valide partendo dai postulati e creando una successione di espressioni legate da relazioni di eguaglianza
    - Sono i teoremi
    - La relazione di eguaglianza gode delle tre proprietà
      - **Riflessiva**: una espressione è eguale a se stessa
      - **Simmetrica**: se una espressione è eguale a una seconda espressione, anche la seconda è eguale alla prima
      - **Transitiva**: due espressioni eguali a una terza sono eguali tra loro

Regole di deduzione (2)

- Requisiti di una buona scelta di postulati
  - Coerenza
    - Usando le regole di deduzione non si arriva in nessun caso a contraddire nessuno dei postulati
    - La mancanza di coerenza inficia completamente un sistema logico-matematico
  - Indipendenza
    - Nessuno dei postulati può essere dedotto dall'insieme dei rimanenti
    - La mancanza di indipendenza evidenzia una ridondanza nella scelta dei postulati ma non intacca la validità della costruzione logica.

#10.3

1/9/1903 "Sets of independent postulates for the algebra of logic"
(american mathematical society)

Questo è il "PRIMO insieme"

Postulati di Huntington (1)

- Siano dati l'insieme B e le operazioni ($\vee$) e ($\wedge$); assumiamo i seguenti 6 postulati
- P1. **chiusura**: $\forall\ x, y \in B$
  - *(a)* $x \vee y \in B$
  - *(b)* $x \wedge y \in B$
- P2. **esistenza degli elementi neutri**: $\forall\ x \in B$
  - *(a)* $x \vee 0 = 0 \vee x = x$
  - *(b)* $x \wedge 1 = 1 \wedge x = x$
- P3. **commutatività**: $\forall\ x, y \in B$
  - *(a)* $x \wedge y = y \wedge x$
  - *(b)* $x \vee y = y \vee x$

Postulati di Huntington (2)

- P4. **distributività reciproca**: $\forall\ x, y, z \in B$
  - *(a)* $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
  - *(b)* $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
- P5. **esistenza del complemento $\overline{x}$**: $\forall\ x \in B$
  - *(a)* $x \vee \overline{x} = 1$
  - *(b)* $x \wedge \overline{x} = 0$
- P6. **esistenza di almeno due elementi distinti**
  - $\exists\ x, y \in B$: $x \neq y$

#10.4

Principio di dualità

- Perfetta reciprocità tra le operazioni
  - Ogni postulato consiste di 2 espressioni *(a)* e *(b)* tali che ciascuna può essere ottenuta dall'altra con le seguenti sostituzioni
    - $\vee$ con $\wedge$ e viceversa
    - 0 con 1 e viceversa
- Conseguenza
  - Da ogni eguaglianza se ne può ottenere una nuova duale, altrettanto valida, con una semplice operazione di scambio in entrambi i termini
    - Si scambiano reciprocamente $\vee$ con $\wedge$
    - Si esegue lo stesso scambio tra 0 e 1

Osservazione

- Genericità degli elementi
  - Nella definizione dell'algebra di Boole gli elementi dell'insieme *B* non sono specificati
    - Ci sono almeno 2 valori costanti
      - Ma possono essere anche di più
      - Si dimostra che sono comunque una potenza del 2
    - Le lettere usate indicano variabili che possono assumere un valore arbitrario
- Genericità delle operazioni
  - Anche delle operazioni $\vee$ e $\wedge$ non si dice altro se non le proprietà che devono soddisfare
- Esistono molte algebre di Boole

\# 10.5

Esempi di *B*

- Esempi di insiemi per un'algebra di Boole
  - {0, 1}; {falso, vero}; {F, T}; {basso, alto}; {L, H}
  - {chiuso, aperto}, {on, off}
  - {a, b, c, …, h}
  - $\{0, 1\}^n$
- Il caso di insiemi con 2 soli elementi
  - Algebre a due valori
  - Algebre commutanti (switching logic)
    - Sono quelli per noi di maggiore interesse

{aree su una superficie}

Esempi di operazioni

- Esempio di operazioni che possono soddisfare le proprietà dell'algebra di Boole
  - $\{\vee, \wedge, \overline{}\}$ {OR, AND, NOT}, {|, &, '}
  - {somma logica, prodotto logico, complemento}
  - {parallelo, serie, commutato}, {parallel, series, toggle}
    - Si applica alle logiche switching, a relè
      - Reti telefoniche "tradizionali"

> {Unione, intersezione, area complementare}

10.6

Precedenza tra operazioni (1)

- In modo convenzionale, per chiarezza e comodità, si definiscono regole di precedenza tra operatori
  - Le regole sono arbitrarie; occorre prestare attenzione a quelle definite nell'algebra a cui facciamo riferimento
    - In assenza di indicazioni, potrebbe essere sensato eseguire le operazioni nell'ordine in cui si incontrano
    - In occidente, da SX a DX
  - Le regole possono sempre essere aggirate con l'uso delle parentesi
    - L'espressione racchiusa tra () viene sempre considerata una entità unica nelle operazioni esterne

Precedenza tra operazioni (2)

- Notazioni usate
  - Per la or (somma logica): + al posto di $\vee$
  - Per la and (prodotto logico): nulla
    - Si accostano i termini senza alcun simbolo frapposto
- Priorità
  - 1: complemento
  - 2: prodotto logico
  - 3: somma logica
- Motivazione "culturale": similitudine alle regole di precedenza di altri sistemi algebrici
- Le espressioni non sono più "simmetriche"
  - Per costruire espressioni duali usare le parentesi

#10.7

Precedenza tra operazioni (3)

- Esempio:

  $a + \overline{bc} + de + f\,\overline{gh} =$

  $= a + \overline{(bc)} + (de) + f\,\overline{(gh)} =$

  $= a + \overline{(bc)} + (de) + f\,\overline{(gh)} =$

  $= (a + \overline{(bc)}) + (de) + (f\,\overline{(gh)}) =$

  $= ((a + \overline{(bc)}) + (de)) + (f\,\overline{(gh)})=$

  $= (((a + \overline{(bc)}) + (de)) + (f\,\overline{(gh)}))$

espressione duale

$a \cdot (\overline{b+c}) \cdot (d+e) \cdot (f + \overline{g+h})$

Teoremi (1)

- 1. Unicità del complemento
  - $\forall\, x \in B \quad \exists!\, \overline{x}$ secondo P5
- 2. Elemento neutro nell'altra operazione
  - (*a*) $x + 1 = 1$
  - (*b*) $x\,0 = 0$
- 3. Complementarità degli elementi neutri
  - (*a*) $\overline{0} = 1$
  - (*b*) $\overline{1} = 0$

Teoremi (2)

- 4. Idempotenza
  - (a) $x + x = x$
  - (b) $xx = x$
- 5. Involuzione
  - $\overline{\overline{x}} = x$
- 6. Assorbimento
  - (a) $x + xy = x$
  - (b) $x(x + y) = x$

Teoremi (3)

- 7. Somma con il complemento
  - (a) $x + \overline{x}y = x + y$
  - (b) $x(\overline{x} + y) = xy$
- 8. Associatività
  - (a) $x + y + z = x + (y + z)$
  - (b) $xyz = x(yz)$
- 9. Legge di De Morgan
  - (a) $\overline{x + y} = \overline{x}\,\overline{y}$
  - (b) $\overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}$

possono essere generalizzati

10.9

Generalizzazione

- La proprietà associativa e la legge di De Morgan possono essere generalizzate
  - In una somma di un qualsiasi numero di elementi il risultato è indipendente dall'ordine con cui sono considerati i singoli elementi
  - Il complemento di una somma di un qualsiasi numero di termini è eguale al prodotto dei complementi degli stessi termini
  - Valgono ovviamente le proposizioni duali

dimostrazioni

T1. Unicità del complemento

- Ho due elementi $\bar{x}$ e z che godono secondo P5 della proprietà di essere complemento di x
  - $\bar{x} = \bar{x}\,1$ — P2(b) elemento neutro
  - $= \bar{x}\,(x + z)$ — sostituzione P5(a)
  - $= \bar{x}x + \bar{x}z$ — P4(b) distributiva
  - $= x\bar{x} + \bar{x}z$ — P3(b) commutativa
  - $= 0 + \bar{x}z$ — sostituzione P5(b)
  - $= xz + \bar{x}z$ — sostituzione P5(b)
  - $= zx + z\bar{x}$ — P3(b) commutativa
  - $= z(x + \bar{x})$ — P4(b) distributiva
  - $= z\,1$ — sostituzione P5(a)
  - $= z$ — P2(b) elemento neutro
  - **q.d.e.**

10.10

T2. Elemento neutro nell'altra operazione

-
  - $x + 1 = 1(x + 1)$ P2(b) elemento neutro
  - $= (x + \overline{x})(x + 1)$ P5(a) definizione complemento
  - $= x + \overline{x}\,1$ P4(a) distributiva
  - $= x + \overline{x}$ P2(b) elemento neutro
  - $= 1$ P5(a) definizione complemento
- La parte (b) segue per dualità
  - $x\,0 = 0 + x\,0$ P2(a) elemento neutro
  - $= x\overline{x} + x\,0$ P5(b) definizione complemento
  - $= x\,(\overline{x} + 0)$ P4(b) distributiva
  - $= x\overline{x}$ P2(a) elemento neutro
  - $= 0$ P5(b) definizione complemento **q.d.e.**

T3. Complementarità degli elementi neutri

- Usiamo il seguente argomento
  - Da T1 (unicità dell'elemento neutro) segue che
    - $\exists!\ \overline{0}$ complemento di 0
  - Inoltre da P2(a) (definizione di elemento neutro)
    - $0 + \overline{0} = \overline{0}$
  - Ma è anche da P5(a) (definizione di complemento)
    - $0 + \overline{0} = 1$
  - Quindi, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza
    - $\overline{0} = 1$
  - La parte (b) segue per dualità
    - $\overline{1} = 0$
    - **q.d.e.**

T4. Idempotenza

- Si ha, $\forall\, x \in B$,
  - $x + x = (x + x)\, 1$ — P2(*b*) elemento neutro
  - $= (x + x)(x + \bar{x})$ — P5(*a*) definizione complemento
  - $= x + x\bar{x}$ — P4(*a*) distributiva
  - $= x + 0$ — P5(*b*) definizione complemento
  - $= x$ — P2(*a*) elemento neutro
- La parte (*b*) segue per dualità
  - $xx = x$
  - q.d.e.

T5. Involuzione

- Si ha, $\forall\, x \in B$,
  - $\bar{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} + 0$ — P2(*a*) elemento neutro
  - $= \bar{\bar{x}} + x\bar{x}$ — P5(*a*) definizione complemento
  - $= (\bar{\bar{x}} + x)(\bar{\bar{x}} + \bar{x})$ — P4(*a*) distributiva
  - $= (x + \bar{\bar{x}})(\bar{x} + \bar{\bar{x}})$ — P3(*a*) commutativa
  - $= (x + \bar{\bar{x}})\, 1$ — P5(*a*) definizione complemento
  - $= (x + \bar{\bar{x}})(x + \bar{x})$ — P5(*a*) definizione complemento
  - $= x + \bar{\bar{x}}\bar{x}$ — P4(*a*) distributiva
  - $= x + \bar{x}\bar{\bar{x}}$ — P3(*b*) commutativa
  - $= x + 0$ — P5(*b*) definizione complemento
  - $= x$ — P2(*a*) elemento neutro
  - q.d.e.

10.12

T6. Assorbimento

- Si ha $\forall\, x, y \in B$
  - $x + xy = x\,1 + xy$ — P2(b) elemento neutro
  - $= x(1 + y)$ — P4(b) distributiva
  - $= x(y + 1)$ — P3(a) commutativa
  - $= x\,1$ — T2(a) prop. elem. neutro
  - $= x$ — P2(b) elemento neutro
- La parte (b) segue per dualità
  - $x(x + y) = x$
  - q.d.e.

T7. Somma con il complemento

- Si ha $\forall\, x, y \in B$
  - $x + \bar{x}y = (x + \bar{x})(x + y)$ — P4(a) distributiva
  - $= 1\,(x + y)$ — P5(a) definizione complemento
  - $= (x + y)\,1$ — P3(b) commutativa
  - $= x + y$ — P2(b) elemento neutro
- La parte (b) segue per dualità
  - $x(\bar{x} + y) = xy$
  - q.d.e.

T8. Associatività (1)

- ∀ $x, y, z \in B$ si abbia
  - $A = x + (y + z)$ e $C = x + y + z$
  - Lemma 1
    - $xA = x[x + (y + z)]$
    - $= x$ — T6(b) assorbimento
    - $xC = x(x + y + z)$
    - $= x(x + y) + xz$ — P4(*b*) distributiva
    - $= x + xz$ — T6(*b*) assorbimento
    - $= x$ — T6(*a*) assorbimento
  - Quindi $xA = xC$ per la proprietà transitiva

T8. Associatività (2)

- Lemma 2
  - $\bar{x}A = \bar{x}[x + (y + z)]$
  - $= \bar{x}x + \bar{x}(y + z)$ — P4(b) distributiva
  - $= x\bar{x} + \bar{x}(y + z)$ — P3(b) commutativa
  - $= 0 + \bar{x}(y + z)$ — P5(b) proprietà complemento
  - $= \bar{x}(y + z)$ — P2(a) elemento neutro
  - $\bar{x}C = \bar{x}(x + y + z)$
  - $= \bar{x}(x + y) + \bar{x}z$ — P4(*b*) distributiva
  - $= \bar{x}x + \bar{x}y + \bar{x}z$ — P4(*b*) distributiva
  - $= x\bar{x} + \bar{x}y + \bar{x}z$ — P3(*b*) commutativa
  - $= 0 + \bar{x}y + \bar{x}z$ — P5(*b*) proprietà complemento
  - $= \bar{x}y + \bar{x}z$ — P2(*a*) elemento neutro
  - $= \bar{x}(y + z)$ — P4(*b*) distributiva
- Quindi $\bar{x}A = \bar{x}C$ per la proprietà transitiva

\# 10.14

T8. Associatività (3)

- Per completare la dimostrazione
  - $xA + \bar{x}A = xC + \bar{x}C$ per sostituzione
  - $Ax + A\bar{x} = Cx + C\bar{x}$ P3(*b*) commutativa
  - $A(x + \bar{x}) = C(x + \bar{x})$ P4(*b*) distributiva
  - $A\,1 = C\,1$ P5(*a*) definizione complemento
  - $A = C$ *P2(b) elemento neutro*
  - $x + (y + z) = x + y + z$
  - La parte (*b*) segue per dualità
    - $x(yz) = xyz$
    - **q.d.e.**

T9. Legge di De Morgan

- Si ha $\forall\, x, y \in B \;:\; \overline{x + y} = \bar{x}\,\bar{y}$
  - La legge si dimostra osservando che $(x + y)$ e $(\bar{x}\,\bar{y})$ soddisfano la definizione di complemento P5
  - Inoltre per T1 il complemento è unico
    - $x + y + \bar{x}\,\bar{y} =$
    - $= (x + y + \bar{x})(x + y + \bar{y})$ P4(*a*) distributiva
    - $= 1$ P3(*a*), T8(*a*), P5(*a*), T2(*a*), T4(*b*)
  - E anche
    - $(x + y)\,\bar{x}\,\bar{y} = \bar{x}\,\bar{y}(x + y)$ P3(b) commutativa
    - $= \bar{x}\,\bar{y}\,x + \bar{x}\,\bar{y}\,y$ P4(*b*) distributiva
    - $= 0$ P3(*b*), T8(*b*), P5(*b*), T2(*b*), T4(*a*)
  - La parte (*b*) segue per dualità
    - $\overline{xy} = \bar{x} + \bar{y}$ **q.d.e.**