Dalle espressioni booleane alla FUNZIONE BOOLEANA

#11.1

Induzione perfetta

- Strumento di deduzione per algebre in cui *B* ha un numero *n* di elementi finito
  - Si voglia dimostrare la validità di una proposizione costituita dall'uguaglianza di due espressioni
    - Si usa a volte il termine di **tautologia**
  - Le espressioni coinvolgono complessivamente un numero finito *m* di variabili booleane
- Procedura
  - Si verifica l'uguaglianza delle espressioni per ogni possibile combinazione dei valori dei termini
  - Occorrono n^m verifiche
    - Ha elevata **complessità computazionale**

è un'algebra di Boole

Logica proposizionale (1)

- Esaminiamo la struttura della logica classica
  - Gli elementi su cui opera sono **proposizioni**
    - È una logica a 2 valori
      - *Tertium non datur*
    - L'insieme *B* è quindi {Falso, Vero}
  - Le argomentazioni logiche combinano proposizioni con le congiunzioni "e", "o"
    - Il risultato è ancora una proposizione con un preciso valore, dipendente dal valore delle singole proposizioni componenti
  - Verifichiamo che le proprietà usuali della **logica** la qualificano come **algebra di Boole**

#11-2

Le operazioni della logica

x	*y*	*x* "e" *y*	*x* "o" *y*
Falso	Falso	Falso	Falso
Falso	Vero	Falso	Vero
Vero	Falso	Falso	Vero
Vero	Vero	Vero	Vero

Logica e postulati (1)

- Osservazioni
  - L'insieme delle proposizioni **è chiuso** rispetto alle operazioni svolte da congiunzioni e negazione (P1)
  - Esiste l'**elemento neutro** (P2)
    - La congiunzione "e" ha elemento neutro Vero
    - La congiunzione "o" ha elemento neutro Falso
  - Le congiunzioni sono **commutative** (P3)
    - Falso "e" Vero equivale a Vero "e" Falso, cioè Falso
    - Falso "o" Vero equivale a Vero "o" Falso, cioè Vero

#11.3

Distributività (a)

x	*y*	*z*	*y* "o" *z*	*x* "e" (*y* "o" *z*)	*x* "e" *y*	*x* "e" *z*	(*x* "e" *y*) "o" (*x* "e" *z*)
Falso	Falso	Falso	Falso	Falso	Falso	Falso	Falso
Falso	Falso	Vero	Vero	Falso	Falso	Falso	Falso
Falso	Vero	Falso	Vero	Falso	Falso	Falso	Falso
Falso	Vero	Vero	Vero	Falso	Falso	Falso	Falso
Vero	Falso	Falso	Falso	Falso	Falso	Falso	Falso
Vero	Falso	Vero	Vero	Vero	Falso	Vero	Vero
Vero	Vero	Falso	Vero	Vero	Vero	Falso	Vero
Vero	Vero	Vero	Vero	Vero	Vero	Vero	Vero

Distributività (b)

x	*y*	*z*	*y* "e" *z*	*x* "o" (*y* "e" *z*)	*x* "o" *y*	*x* "o" *z*	(*x* "o" *y*) "e" (*x* "o" *z*)
Falso	Falso	Falso	Falso	Falso	Falso	Falso	Falso
Falso	Falso	Vero	Falso	Falso	Falso	Vero	Falso
Falso	Vero	Falso	Falso	Falso	Vero	Falso	Falso
Falso	Vero	Vero	Vero	Vero	Vero	Vero	Vero
Vero	Falso	Falso	Falso	Vero	Vero	Vero	Vero
Vero	Falso	Vero	Falso	Vero	Vero	Vero	Vero
Vero	Vero	Falso	Falso	Vero	Vero	Vero	Vero
Vero	Vero	Vero	Vero	Vero	Vero	Vero	Vero

#11.4

Logica e postulati (2)

- Osservazioni
  - Sono **distributive** (P4)
    - Lo evidenziano le tabelle (a) e (b)
  - Esiste la **negazione** secondo le proprietà del complemento (P5)
    - Una proposizione e la negata non possono coesistere
    - Una proposizione o la negata esauriscono le possibilità
- Conclusione: la classica logica proposizionale è un'algebra di Boole a due valori
  - Si stabilisce un isomorfismo tra le due strutture
    - Falso, Vero corrispondono a 0, 1
    - "o", "e" corrispondono a $\vee$ e $\wedge$

FUNZIONI BOOLEANE

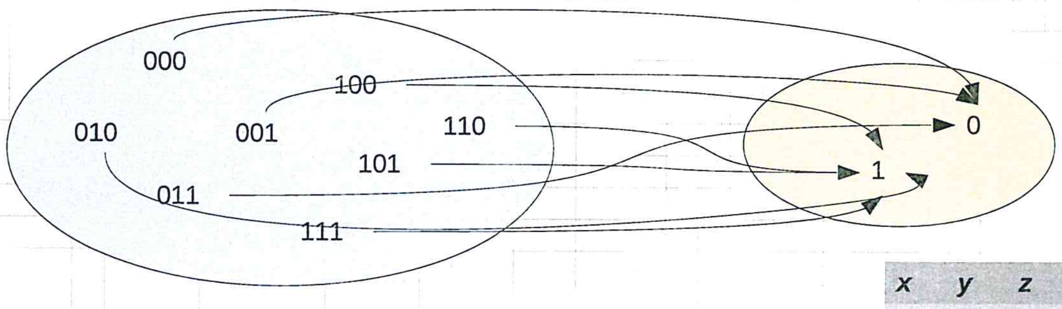
Funzioni booleane complete

- Consideriamo un funzione f di n variabili
  - $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
  - Applicazione da $B^n \rightarrow B$ che a ogni valore del dominio (una n-upla di valori booleani) associa un valore booleano e uno soltanto
- Nel caso di B finito può essere espressa con...
  - Grafico nella rappresentazione di Eulero-Venn
  - Espressione booleana
  - Tabella
  - ...

#11,5

algebra di 2 valori

Rappresentazione di funzioni



$$f = x + \bar{z}y$$

x	*y*	*z*	*f*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Tabella di verità

- Una qualsiasi funzione booleana è determinata dalla sua tabella di verità
  - Lista ordinata in cui a ogni riga è associata una diversa combinazione degli ingressi
    - Le righe sono 2^n
    - Le righe possono essere individuate dal numero naturale binario le cui cifre corrispondono ai valori logici degli ingressi
    - Non è necessario indicarle esplicitamente
  - Le colonne sono $n + 1$
    - Si riducono a 1
      - L'unica colonna col valore della funzione
  - Esistono 2^{2^n} diverse funzioni a n ingressi

11.6

Forme normali

- Letterali
  - Ciascuna occorrenza di una variabile, affermata o negata, in una espressione booleana
- Termine prodotto
  - Singolo letterale o prodotto di letterali
- Forma somma di prodotti (SP)
  - Espressione booleana costituita da un singolo termine prodotto o da una somma di essi
- In modo duale si costruisce la forma prodotto di somme (PS)

Forme canoniche

- Dalla tabella di verità all'espressione logica
  - L'espressione logica è un passaggio verso la realizzazione elettronica
  - Le espressioni logiche si possono manipolare con i teoremi in modo da apportare semplificazioni
- Proprietà delle forme canoniche
  - Particolari forme normali (SP o PS) costruite in modo da avere termini (prodotto o somma) costituiti da tutte le variabili di ingresso — Sono i MINTERMINI (vedi poi)
  - Sono univoche
    - Due funzioni equivalenti hanno le stesse forme canoniche

#11.7

I mintermini

- Termini prodotto costituiti da tutte le variabili di ingresso, nelle possibili combinazioni affermate o negate
  - Un mintermine è vero per una, e una soltanto, combinazione degli ingressi
    - Per esempio xyz vale 1 solo per l'ingresso 111, mentre il mintermine che vale 1 per la combinazione 100 è $x\,\overline{y}\,\overline{z}$
  - La forma canonica SP è una **forma normale SP costituita solo da mintermini**
    - Dovrà essere presente un mintermine in corrispondenza di ciascuna riga a 1 della tabella di verità

La notazione *m*

- Un mintermine può essere individuato con il **numero corrispondente alla riga** della tabella di verità per cui è vero
  - Per esempio
    - $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$ si individua con m_0
    - $\overline{x}\,y\,\overline{z}$ con m_2
    - xyz con m_7
  - La forma canonica si scrive come **sommatoria dei mintermini** m_i per cui la funzione è vera
  - Per esempio
    - $f = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,\overline{z} + xyz = m_0 + m_2 + m_7$
    - Generalizzando $f = \sum m(0,2,7)$

DUALE

I Maxtermini

- Termini somma costituiti da tutte le variabili di ingresso, nelle possibili combinazioni affermate o negate
  - Un Maxtermine è falso per una, e una soltanto, combinazione degli ingressi
    - Per esempio $(x + y + z)$ vale 0 solo per l'ingresso 000, mentre il Maxtermine che vale 0 per la combinazione 011 è $(x + \overline{y} + \overline{z})$
  - La forma canonica PS è una **forma normale PS costituita solo da Maxtermini**
    - Dovrà essere presente un Maxtermine in corrispondenza di ciascuna riga a 0 della tabella di verità

La notazione *M*

- Un Maxtermine può essere individuato con il **numero corrispondente alla riga** della tabella di verità per cui è falso
  - Per esempio
    - $(x + y + \overline{z})$ si individua con M_1, $(x + \overline{y} + \overline{z})$ con M_3, $(\overline{x} + y + z)$ con M_4, $(\overline{x} + y + \overline{z})$ con M_5, $(\overline{x} + \overline{y} + z)$ con M_6
  - La forma canonica si scrive come **produttoria dei Maxtermini** M_i per cui la funzione è falsa
  - Per esempio
    - $f = (x + y + \overline{z})(x + \overline{y} + \overline{z})(\overline{x} + y + z)(\overline{x} + y + \overline{z})(\overline{x} + \overline{y} + z) = M_1M_3M_4M_5M_6$
    - Generalizzando $f = \prod M(1,3,4,5,6)$

Algebra a 2 valori

#11.8

Manipolazione di espressioni (1)

- Espansione secondo Shannon
  - (a) $f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) =$
    $= \overline{x}_i\, f(x_1, x_2, ..., 0, ..., x_n) + x_i\, f(x_1, x_2, ..., 1, ..., x_n)$
  - (b) $f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) =$
    $= [\overline{x}_i + f(x_1, x_2, ..., 1, ..., x_n)][x_i + f(x_1, x_2, ..., 0, ..., x_n)]$

    forma duale
  - L'espansione...
    - Evidenzia l'effetto di una particolare variabile, che viene eliminata dall'espressione
    - Può essere ripetuta ricorsivamente su tutte le variabili arrivando alla forma canonica

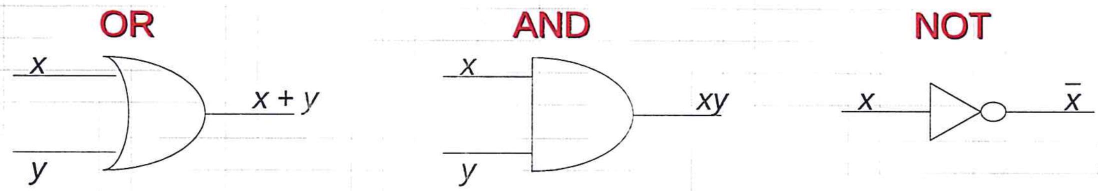
Manipolazione di espressioni (2)

- Riduzione secondo Shannon
  - (a) $x_i\, f(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = x_i\, f(x_1, ..., 1, ..., x_n)$ (deriva facilmente dal precedente)
  - (b) $x_i + f(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = x_i + f(x_1, ..., 0, ..., x_n)$
- E similmente
  - (a) $\overline{x}_i\, f(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = \overline{x}_i\, f(x_1, ..., 0, ..., x_n)$
  - (b) $\overline{x}_i + f(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = \overline{x}_i + f(x_1, ..., 1, ..., x_n)$
- La riduzione...
  - Permette di semplificare rapidamente espressioni ottenute come somma (o prodotto) di una singola variabile per altri termini che contengono la variabile stessa.

! verso la sintesi di architett.

Porte logiche

- In algebre a due valori
  - Associati a grandezze elettriche {VL, VH}
- Sono circuiti elettronici che si comportano secondo le proprietà delle operazioni logiche
  - Chiamiamo questi circuiti "porte logiche elementari" OR, AND e NOT



Reti logiche combinatorie

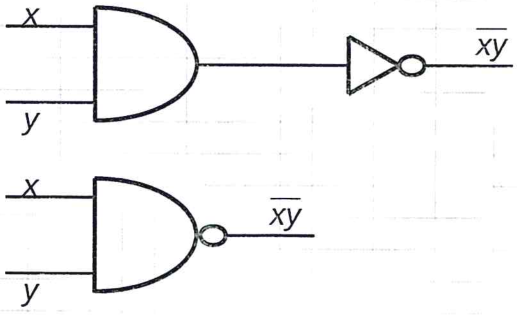
- Schema grafico
  - Composto da porte logiche interconnesse
  - Realizza o implementa una funzione logica
  - Si definisce combinatoria se l'uscita è completamente determinata dagli ingressi
    - Condizione sufficiente è l'assenza di loop ingresso/uscita
      - Si definiscono reti acicliche
  - Reti in cui l'uscita dipende dai valori precedenti si definiscono sequenziali
  - L'analisi di una rete logica consiste nell'identificare l'espressione che implementa
  - La sintesi esegue il processo inverso
    - Dall'espressione allo schema a porte logiche

Condizione *don't care*

- Gli ingressi non specificati
  - Non fisicamente possibili
  - Ingressi per cui non interessa conoscere il comportamento della rete
- Descrizione di funzioni incomplete
  - Nella tabella di verità si indicano con -
  - Nelle forme canoniche si elencano le combinazioni *don't care*
- In uno schema logico non esistono condizioni non specificate
  - La rete calcola sempre un uscita 0 o 1
  - Nella sintesi questo aumenta i gradi di libertà

Una nuova porta logica

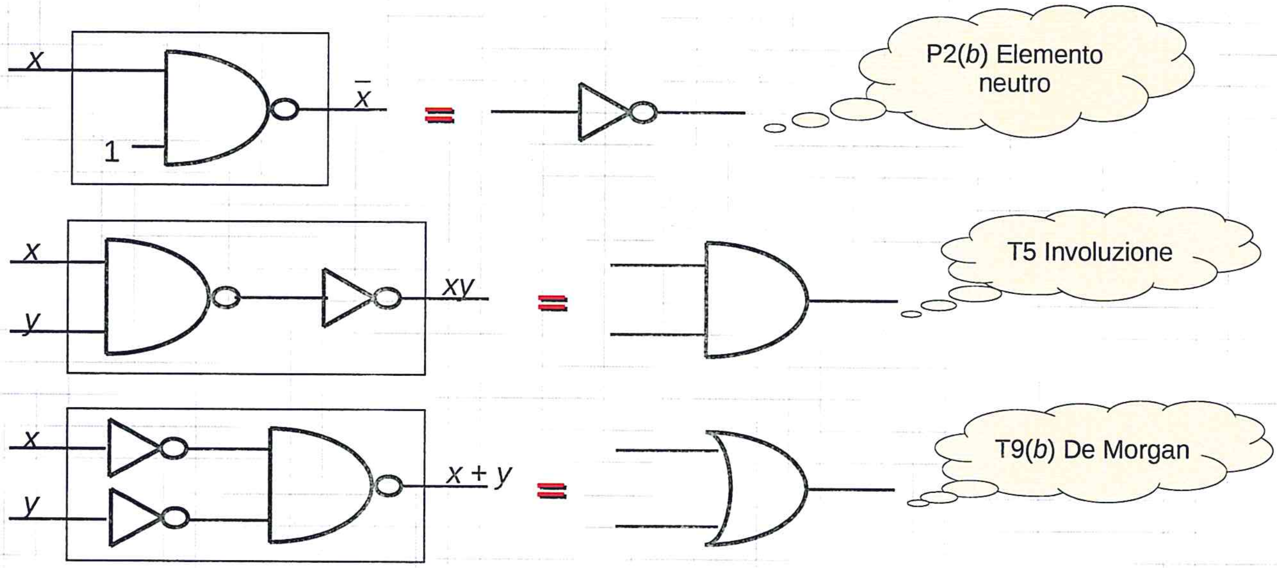
- Possiamo definire una nuova porta
  - Il prodotto logico negato o porta NAND



#11.9

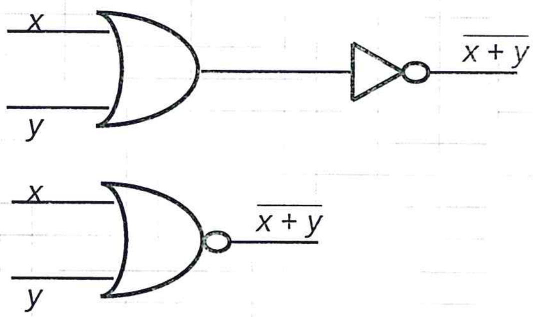
NAND porta universale

- Si può usare per realizzare tutte le altre porte



La porta NOR

- Si definisce in modo duale
  - Somma logica negata o porta NOR
  - È anch'essa una porta universale
  - Somma logica negata o porta NOR



#11.10

Forma NAND-NAND (NOR-NOR)

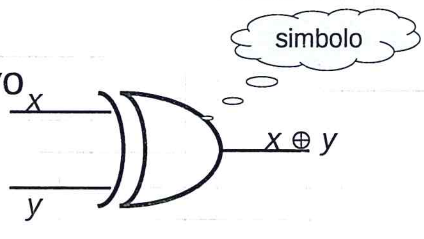
- E possibile realizzare funzioni facendo uso solo di uno stesso tipo di porta universale
  - Sostituendo a ogni porta la sua equivalente realizzata con porte NAND (NOR)
  - Oppure applicando involuzione e legge di De Morgan ricorsivamente
    - In particolare la forma SP applicando T5 e T9(a) si trasforma in una forma NAND-NAND

$$f = xy + \overline{x}\,zt + \overline{y}\,t = \overline{(\overline{xy})(\overline{\overline{x}\,zt})(\overline{\overline{y}\,t})}$$

La porta XOR (e XNOR)

- Definizione
  - $x \oplus y = x\overline{y} + \overline{x}y = (x + \overline{y})(\overline{x} + y)$
- Proprietà notevoli della XOR

x1	$x \oplus 0 = x$	elemento neutro
x2	$x \oplus 1 = \overline{x}$	invertitore comandato
x3	$x \oplus x = 0;\ x \oplus \overline{x} = 1$	
x4	$x \oplus y = y \oplus x$	commutativa
x5	$x \oplus (y \oplus z) = x \oplus y \oplus z$	associativa
x6	$x(y \oplus z) = xy \oplus xz$	prodotto distributivo
x7	$x + y = x \oplus y \oplus xy$	
x8	$x \oplus y = z \Rightarrow y \oplus z = x;\ \ x \oplus z = y$	



Dimostrazioni #11.11

x1) $x \oplus \emptyset = x \cdot 1 + \bar{x} \cdot \emptyset = x$ semplice sostituzione

x2) $x \oplus 1 = x \cdot \emptyset + \bar{x} \cdot 1 = \bar{x}$

x3) $x \oplus x = x \cdot \bar{x} + \bar{x} \cdot x = \emptyset$

$x \oplus \bar{x} = x \cdot x + \bar{x} \cdot \bar{x} = x + \bar{x} = 1$

x4) $x \oplus y = x\bar{y} + \bar{x}y = y\bar{x} + \bar{y}x = y \oplus x$

doppio passaggio

x5) $x \oplus (y \oplus z) = x \cdot (\overline{y \oplus z}) + \bar{x}(y \oplus z) = x \cdot (\overline{y\bar{z} + \bar{y}z}) + \bar{x}(y\bar{z} + \bar{y}z) =$

$= x(\bar{y} + z)(y + \bar{z}) + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z = x\bar{y}\bar{z} + xzy + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$
① ② ③ ④

$x \oplus y \oplus z = (x\bar{y} + \bar{x}y) \cdot \bar{z} + (\bar{x} + y)(x + \bar{y}) \cdot z = x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + yzz$
① ③ ④ ②

x6) $x(y \oplus z) = x(y\bar{z} + \bar{y}z) = xy\bar{z} + x\bar{y}z = xy(\bar{z} + \bar{x}) + (\bar{y} + \bar{z})xz =$

come ciò

$= xy \oplus xz$ (prodotto DISTRIBUTIVO)

x7) $x \oplus y \oplus xy = (x\bar{y} + \bar{x}y) \oplus xy = (x\bar{y} + \bar{x}y)(\bar{x} + \bar{y}) + (\bar{x} + y)(x + \bar{y}) \cdot xy =$

$= x\bar{y} + \bar{x}y + xy = x + \bar{x}y = x + y$ (T7)

x8) $x \oplus y = z$

$$\begin{cases} z \oplus x = y \\ z \oplus y = x \end{cases}$$

deriva da x5, x4 e x1
x3

Considerando gli insiemi: UNISCE le parti che appartengono ESCLUSIVAMENTE a 1 solo dei due addendi.

#11.12

"visualizzare" i teoremi precedenti

$x \oplus \emptyset = x$ perché x non ha nulla a comune con $\emptyset$

$x \oplus 1 = \bar{x}$ $\bar{x}$ appartiene esclusivamente a 1 (e non a x)

$x \oplus x = \emptyset$ ovvio x appartiene a se stesso

$x \oplus \bar{x} = 1$ si sommano perfettamente e danno l'intero

$x \oplus y = y \oplus x$ ovvio

associativa ovvia

$x(y \oplus z)$ x interseca l'unione esclusiva

$x \oplus y \oplus xy = x+y$