

Electronica Sistemi Digitali

12 ~~07~~. Sintesi di reti combinatorie

Roberto Roncella



Sintesi di reti combinatorie

Criteria e procedure di sintesi (4.1-4.7)

Introduzione: formulazione e parametri di valutazione
Implicanti principali e coperture irridondanti
Mappe di Karnaugh: procedura grafica di sintesi ottima
Mappe a 5 e 6 variabili
Sintesi ottime di reti combinatorie incomplete
Cenno alla sintesi di reti combinatorie con più uscite

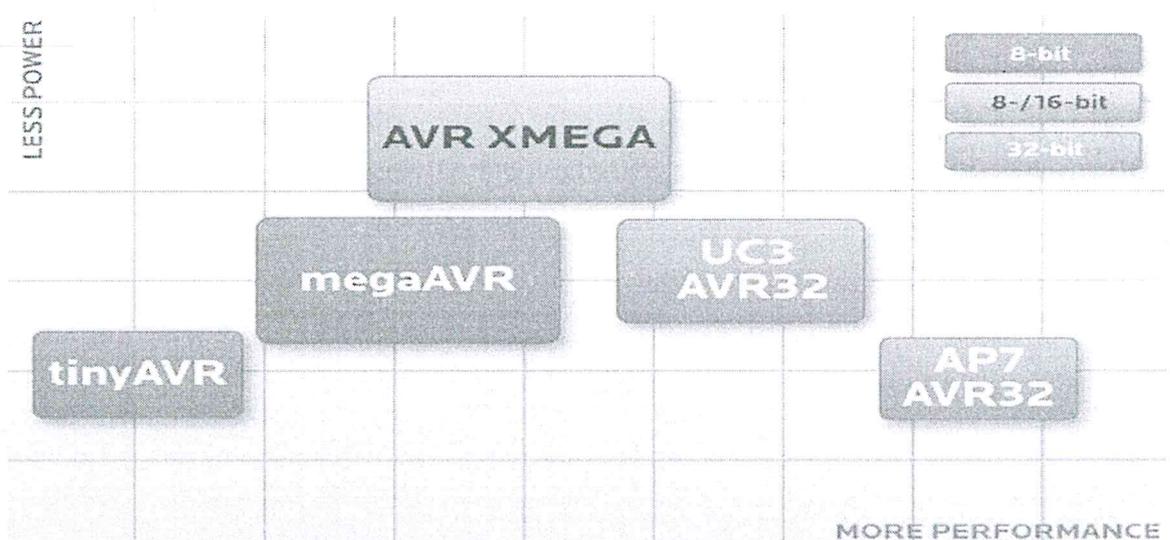
Algoritmo di Quine-McCluskey

Prestazioni di una rete logica

- Parametri per la misura di prestazione
 - Tempo di esecuzione, potenza di elaborazione
 - Consumo di potenza
 - Ingombro, costo
 - Affidabilità
- La soluzione è sempre un compromesso
 - Il peso di un parametro dipende dall'applicazione
- Spazio di progetto
 - Dominio di tutte le possibilità
 - Spesso rappresentato come spazio cartesiano 2D o 3D, in cui le realizzazioni fisiche sono individuate da punti o aree in funzione di 2 o 3 parametri di prestazione

3

Spazio prestazioni/consumo



4

Formulazione del problema

- Selezione dei criteri di interesse
 - Velocità ragionevole della rete combinatoria
 - Dipende dai livelli di logica tra ingresso e uscita
 - Le forme normali hanno due livelli di logica
 - Costo, ingombro
- Formalizzazione di un funzionale di costo
 - Espressione analitica legata ai parametri da ottimizzare
 - La sua valutazione dà uno scalare che rappresenta il costo
- Manipolazione delle espressioni per minimizzare il "costo"
 - Considerando una implementazione diretta dell'espressione logica

5

Il criterio di ottimo (1)

- Minimo numero di letterali in forme normali
 - La scelta della forma normale pone un vincolo sul tempo di ritardo della rete: dell'ordine di due porte in cascata
 - Il numero di letterali è legato al costo effettivo dei componenti
 - Il numero di letterali di una espressione è legato al numero di ingressi delle porte che la implementano
 - La dimensione di una porta dipende dal numero di ingressi
 - Il numero di porte della rete è invece legato al numero di termini della forma normale *— la porta di uscita*
 - $NP = NT - NT1 + 1$ per $NT > 1$
 - NP : numero di porte
 - NT : numero di termini
 - $NT1$: numero di termini con un solo elemento

6

Il criterio di ottimo (2)

- > Vantaggi
 - > Ragionevolmente legato al costo effettivo
 - > Semplicità della definizione
 - > Possibilità di individuare procedure rigorose per minimizzare il costo secondo il numero di letterali
- > Limiti
 - > È rigido nella scelta dei due livelli di logica
 - > Trascura numerosi aspetti
 - > Il numero di porte
 - > Il tipo di porta (AND/OR)
 - > Non pesa le inversioni

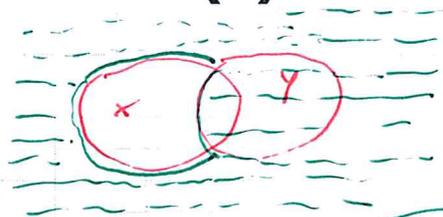
7

Implicazione (1)

- > Simbolo e definizione
 - > $(x \Rightarrow y) = xy + \bar{x}$
- > Osservazioni (logica proposiz.)
 - > x ipotesi e y tesi
 - > La verità dell'ipotesi è sufficiente per la tesi
 - > Un'ipotesi falsa può implicare qualsiasi cosa
- > Un teorema interessante
 - > La dimostrazione per assurdo
 - > $(x \Rightarrow y) = xy + \bar{x} = xy + \bar{x} \cdot 1 = xy + \bar{x}(y + \bar{y})$
 - > $= xy + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y} = y(x + \bar{x}) + \bar{x}\bar{y}$
 - > $= \bar{y} \cdot 1 + \bar{x}\bar{y} = \bar{x}\bar{y} + \bar{y} = (\bar{y} \Rightarrow \bar{x})$

PIÙ VELOCEMENTE:

$$\bar{y}\bar{x} + y = \bar{y}\bar{x} + xy + \bar{x}y = xy + \bar{x}$$



$$\begin{aligned} (x \Rightarrow y)(y \Rightarrow x) &= \\ &= (xy + \bar{x})(xy + \bar{y}) = \\ &= xy + \bar{x}\bar{y} = \overline{x \oplus y} \end{aligned}$$

in algebra e
L'uso di
indica
equivalente

8

Implicazione (2)

- › Parlando di funzioni, diciamo che se
 - › $(f_1 \Rightarrow f_2)$
 - › f_1 implica f_2 , f_2 è implicato da f_1
 - › \bar{f}_2 implica \bar{f}_1
- › Riferendoci a una forma normale SP
 - › Ciascun termine o combinazione di termini implica la funzione complessiva
- › Nella forma PS invece
 - › Ciascuna somma o combinazione di somme è implicata dalla funzione complessiva

DUALE

9

Implicazione tra termini

- › In un termine prodotto, un termine $tp1$ include un secondo termine $tp2$ se i letterali di quest'ultimo sono anche letterali del primo
 - › Il primo termine implica il secondo: $tp1 \Rightarrow tp2$
- › In un termine somma, un termine $ts1$ include un secondo termine $ts2$ se i letterali di quest'ultimo sono anche letterali del primo
 - › Il secondo termine implica il primo: $ts2 \Rightarrow ts1$
- › La proprietà di inclusione riguarda proprio il fatto che l'espressione del primo termine contiene al suo interno l'espressione del secondo

DUALE

10

Implicanti e implicanti principali

- › Definizione
 - › Termine prodotto che implica la funzione
- › Conseguenze
 - › Tutti i termini dell'espressione di una funzione in forma normale SP sono implicanti
 - › Tutti i mintermini sono implicanti
- › Un implicante si dice principale se non include altri implicanti della stessa funzione

11

Implicati e implicati principali

BOALE

- › Definizione
 - › Termine somma che è implicato dalla funzione
- › Conseguenze
 - › Tutti i termini somma dell'espressione di una funzione in forma normale PS sono implicati
 - › Tutti i Maxtermini sono implicati
- › Un implicato si dice principale se non include altri implicati della stessa funzione

12

Teorema di ottimalità

- Una forma normale SP ottima secondo il criterio del minimo numero di letterali è composta esclusivamente di implicanti principali
 - La dimostrazione è basata sul fatto che un implicante non principale ne contiene uno principale della stessa funzione, con meno letterali *include*
 - In tutti gli ingressi per cui l'implicante non principale implica la funzione, implica anche quello principale che lo include, e tramite quest'ultimo è garantito il corretto valore a 1 della funzione complessiva

$$abc + abc + \dots$$

ab

13

Liste di copertura irridondanti

- Definizione
 - Forma normale SP composta da implicanti principali tali che nessuno dei termini che la compongono può essere eliminato mantenendo l'uguaglianza con la funzione
- Una forma normale SP ottima secondo il criterio del minimo numero di letterali è una lista di copertura irridondante
 - La dimostrazione, ovvia, discende dal fatto che l'eliminazione di un termine riduce il numero di letterali
 - Il termine "copertura" si riferisce al fatto che i termini "coprono" gli 1 della funzione

14

Il caso duale PS

- › Le stesse osservazioni sull'ottimalità delle forme normali SP possono essere fatte per le forme PS, facendo riferimento agli implicati principali
- › Inoltre una lista di copertura irridondante nel caso della forma PS è costituita da un elenco di implicati principali, che coprono tutti i valori 0 della funzione, nessuno dei quali può essere omesso

15

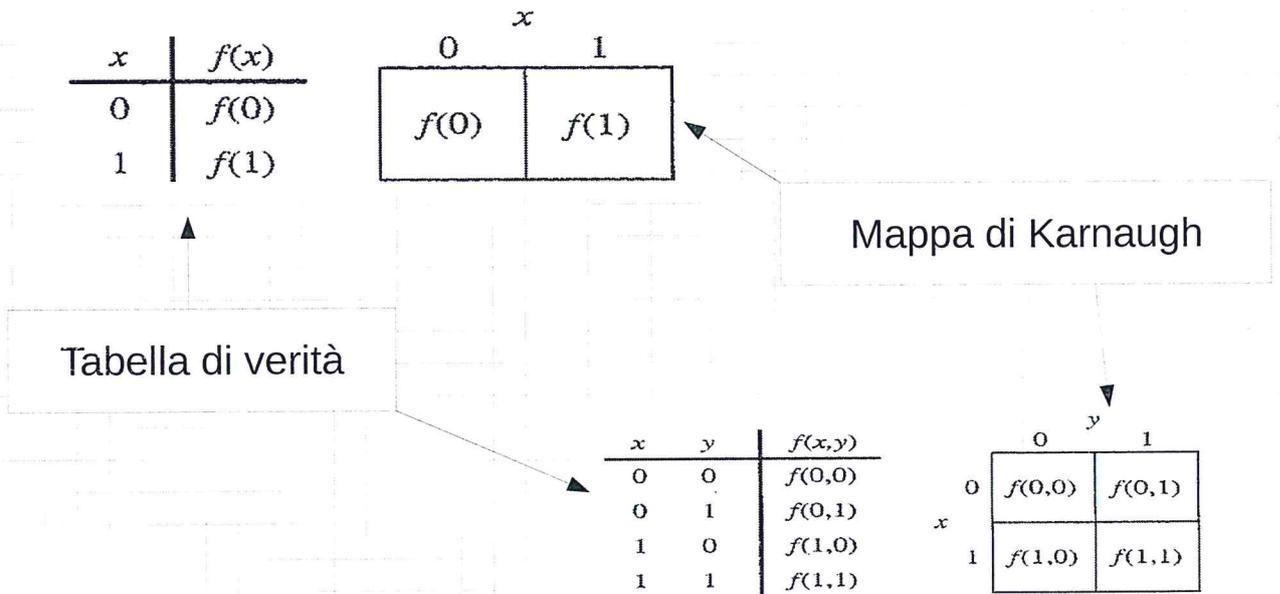
Metodo OPERATIVO

Mappe di Karnaugh: proprietà

- › Forma tabellare di una rete in cui ogni cella corrisponde a una combinazione degli ingressi
 - › Le celle sono 2^n
 - › Si attua un indirizzamento n -dimensionale
 - › Gli "1" della funzione sono i mintermini
- › Celle adiacenti sono caratterizzate dalla variazione di valore di un solo ingresso
 - › Facile determinare gli implicanti della funzione
 - › Due mintermini adiacenti fondono e danno origine a un implicante di ordine 1 che entrambi includono
 - › Due implicanti di ordine 1 adiacenti danno origine a un implicante di ordine 2 (4 celle a 1) che entrambi includono
 - › ecc.

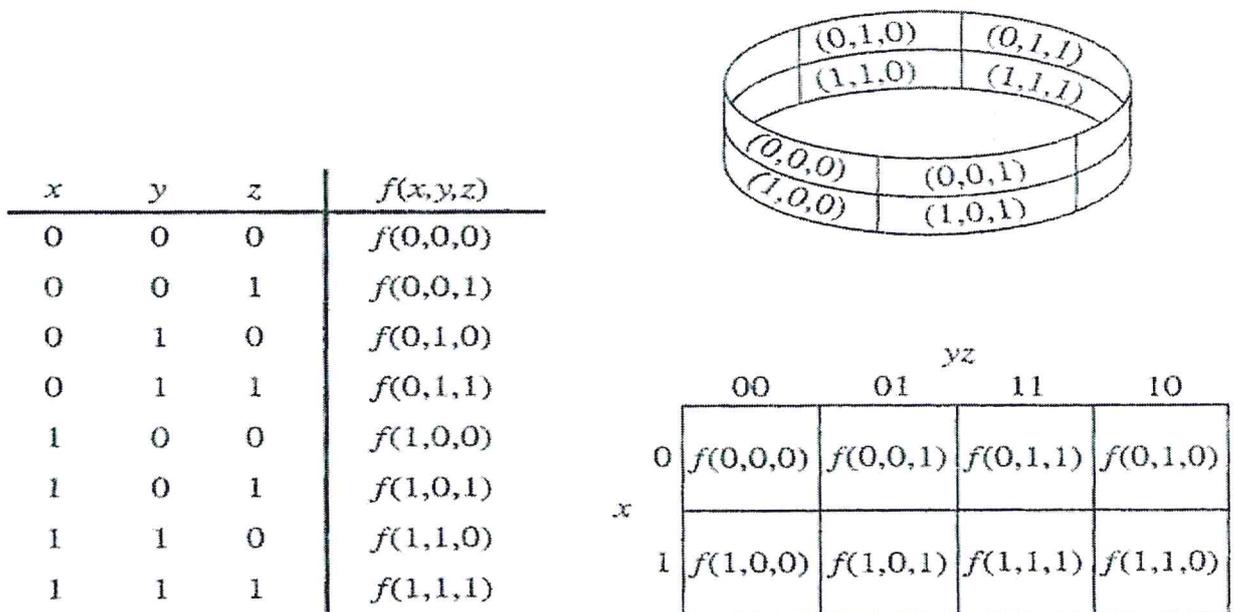
16

Mappe a 1 e 2 variabili



17

Mappe a 3 variabili



18

Mappe a 3 variabili: esempio

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

		yz			
		00	01	11	10
x	0	1	0	0	1
	1	1	1	0	0

19

Mappe a 4 variabili

w	x	y	z	$f(w,x,y,z)$
0	0	0	0	$f(0,0,0,0)$
0	0	0	1	$f(0,0,0,1)$
0	0	1	0	$f(0,0,1,0)$
0	0	1	1	$f(0,0,1,1)$
0	1	0	0	$f(0,1,0,0)$
0	1	0	1	$f(0,1,0,1)$
0	1	1	0	$f(0,1,1,0)$
0	1	1	1	$f(0,1,1,1)$
1	0	0	0	$f(1,0,0,0)$
1	0	0	1	$f(1,0,0,1)$
1	0	1	0	$f(1,0,1,0)$
1	0	1	1	$f(1,0,1,1)$
1	1	0	0	$f(1,1,0,0)$
1	1	0	1	$f(1,1,0,1)$
1	1	1	0	$f(1,1,1,0)$
1	1	1	1	$f(1,1,1,1)$

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	$f(0,0,0,0)$	$f(0,0,0,1)$	$f(0,0,1,1)$	$f(0,0,1,0)$
	01	$f(0,1,0,0)$	$f(0,1,0,1)$	$f(0,1,1,1)$	$f(0,1,1,0)$
	11	$f(1,1,0,0)$	$f(1,1,0,1)$	$f(1,1,1,1)$	$f(1,1,1,0)$
	10	$f(1,0,0,0)$	$f(1,0,0,1)$	$f(1,0,1,1)$	$f(1,0,1,0)$

20

Mappe a 4 variabili: esempio

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	1	1	0	1
	01	1	1	0	0
	11	0	0	0	0
	10	1	0	0	1

21

Mappe e forma canonica

- Ogni 1 della mappa corrisponde a un mintermine
 - Per costruire il mintermine prendiamo la variabile se nell'indirizzo di cella la variabile vale 1, altrimenti prendiamo la variabile negata
- Ogni 0 della mappa corrisponde a un Maxtermine DUALE
 - Per costruire il Maxtermine prendiamo la variabile se nell'indirizzo di cella la variabile vale 0, altrimenti sommiamo la variabile negata

22

Esempio di min_ e Max_termini

		yz				
		00	01	11	10	
wx	00	1	1	0	1	$\bar{w}\bar{x}y\bar{z}$
	01	1	1	0	0	$w + \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$
	11	0	0	0	0	$\bar{w} + \bar{x} + y + z$
	10	1	0	0	1	$w\bar{x}y\bar{z}$

23

Mappe e notazione decimale

- > Attribuendo agli ingressi il valore di cifre binarie, ogni cella della mappa viene ad avere un indirizzo costituito da un numero intero
- > Utile per le funzioni il cui valore logiche ha a che fare con proprietà matematiche

		$X_1 X_0$				
		00	01	11	10	
X_2	0	0	1	3	2	
	1	4	5	7	6	
	11	12	13	15	14	
	10	8	9	11	10	

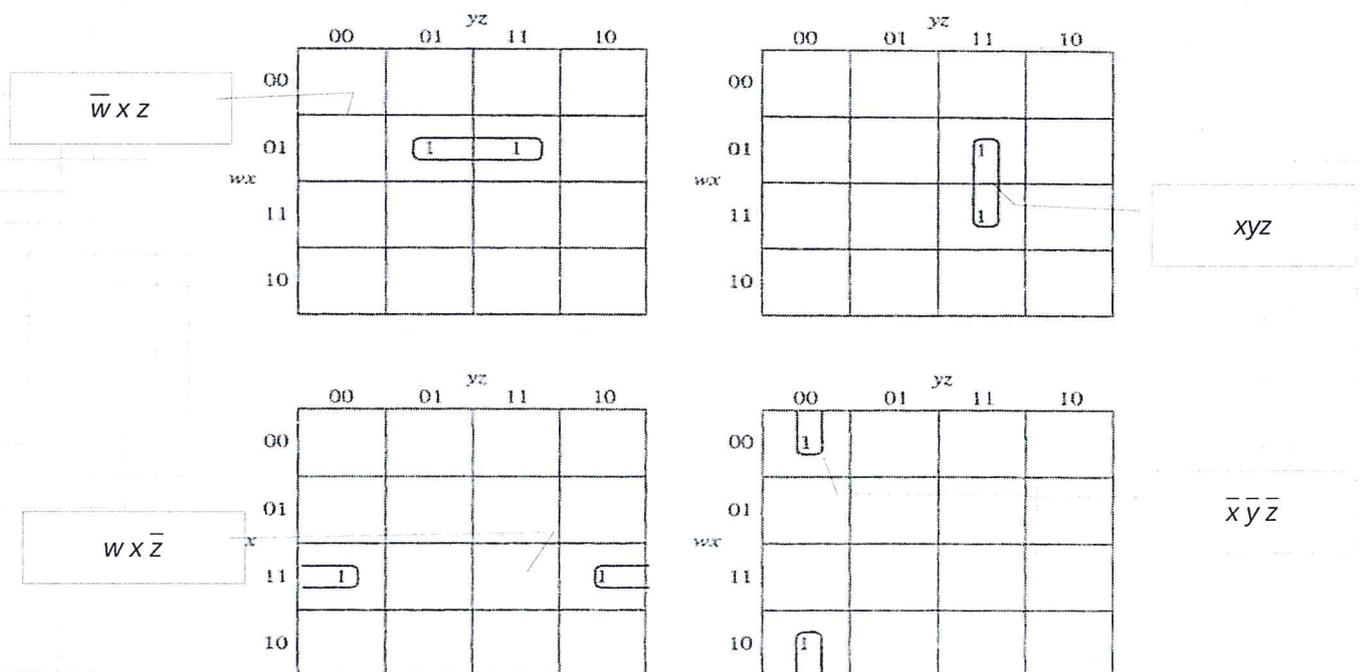
24

Mappe, implicanti e implicati

- Ogni raggruppamento rettangolare di 1 della mappa, con i lati pari a potenze di 2 ($2^a \times 2^b$), corrisponde a un implicante di ordine $(a + b)$
 - Si definisce sottocubo
 - Si ricordi che anche le celle estreme sono tra loro adiacenti
 - Per descrivere l'implicante si assumono le variabili affermate in corrispondenza al valore 1, le variabili negate in corrispondenza al valore 0
- Ogni raggruppamento rettangolare di 0 della mappa, ... , corrisponde a un implicato ...
 - Si ragioni in modo duale

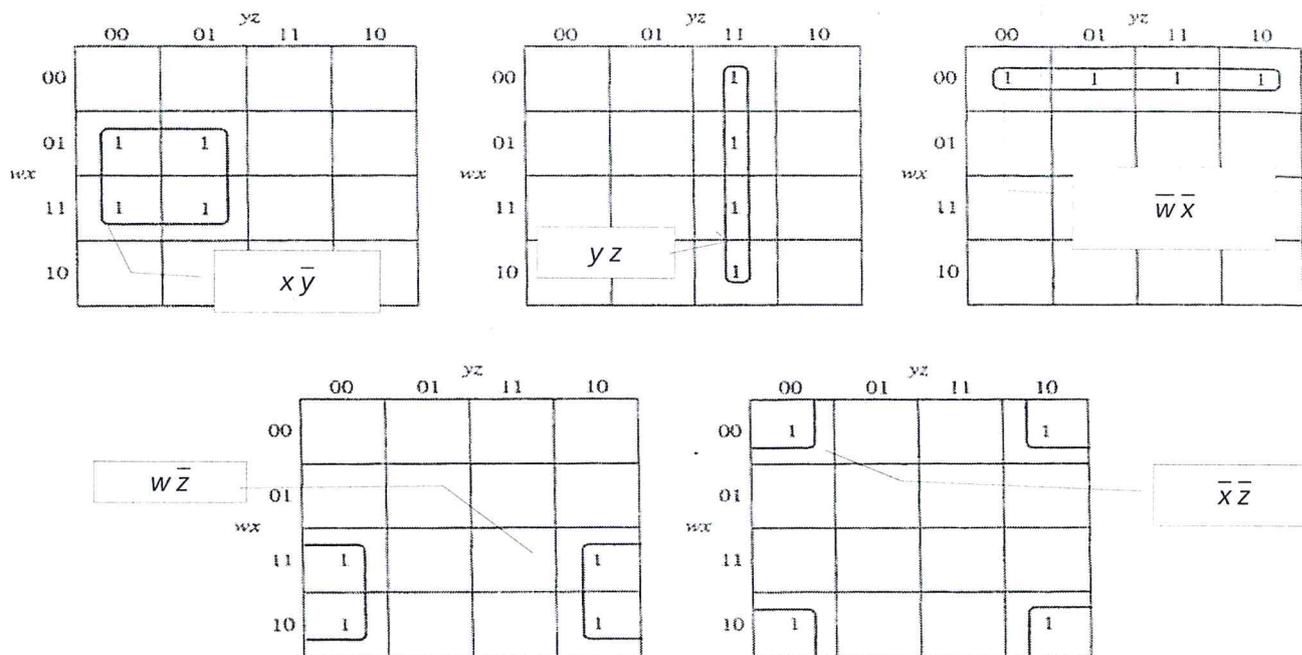
25

Implicanti di ordine 1: esempi



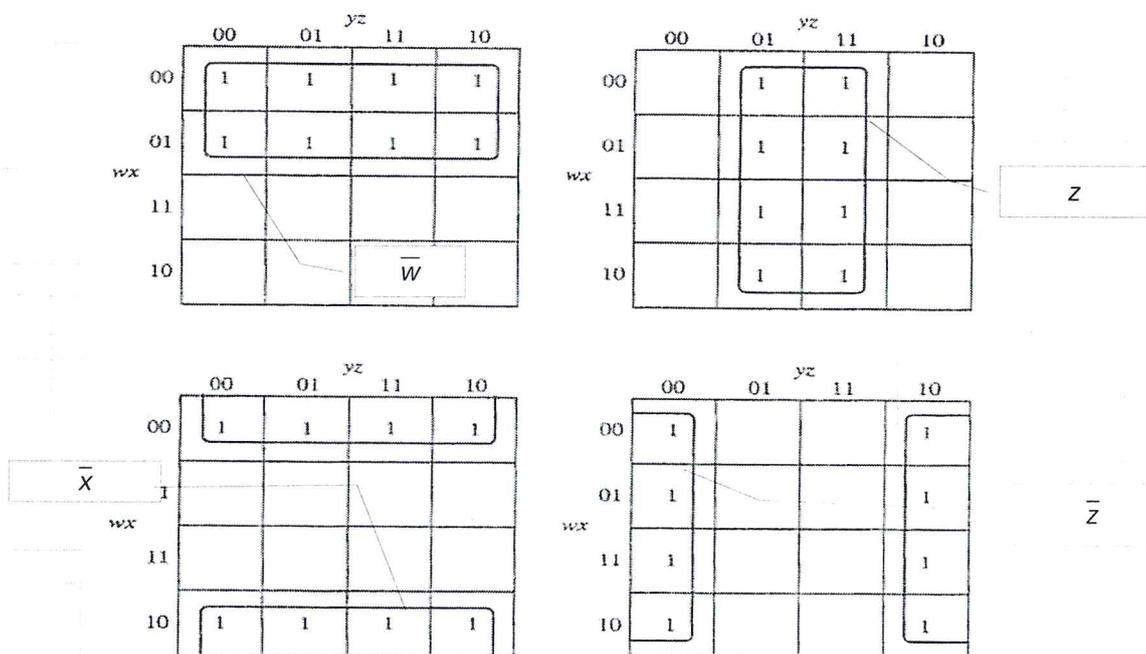
26

Implicanti di ordine 2: esempi



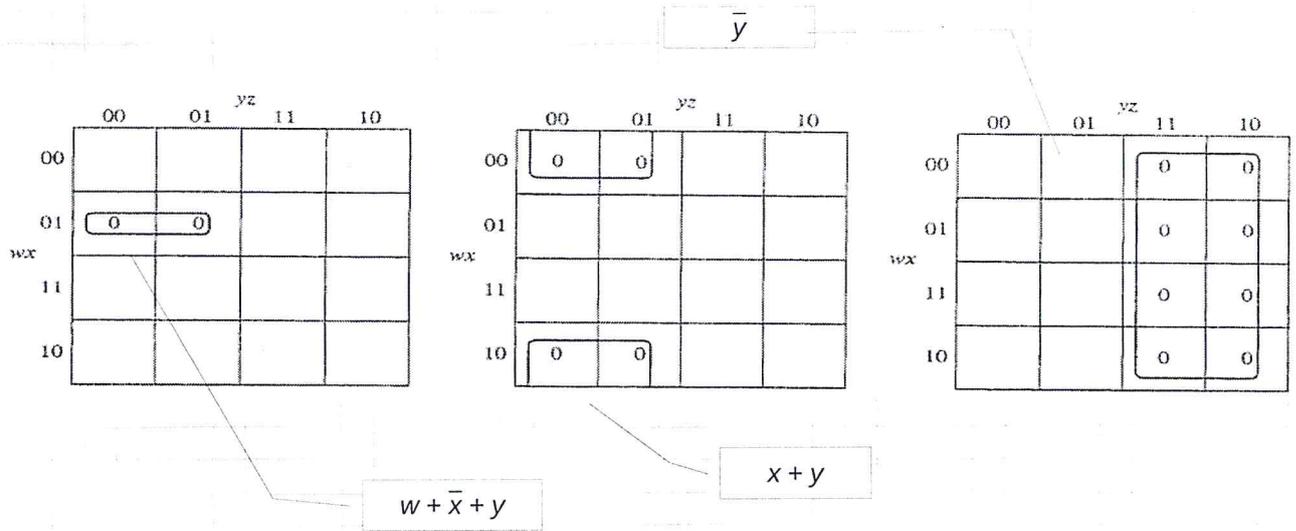
27

Implicanti di ordine 3: esempi



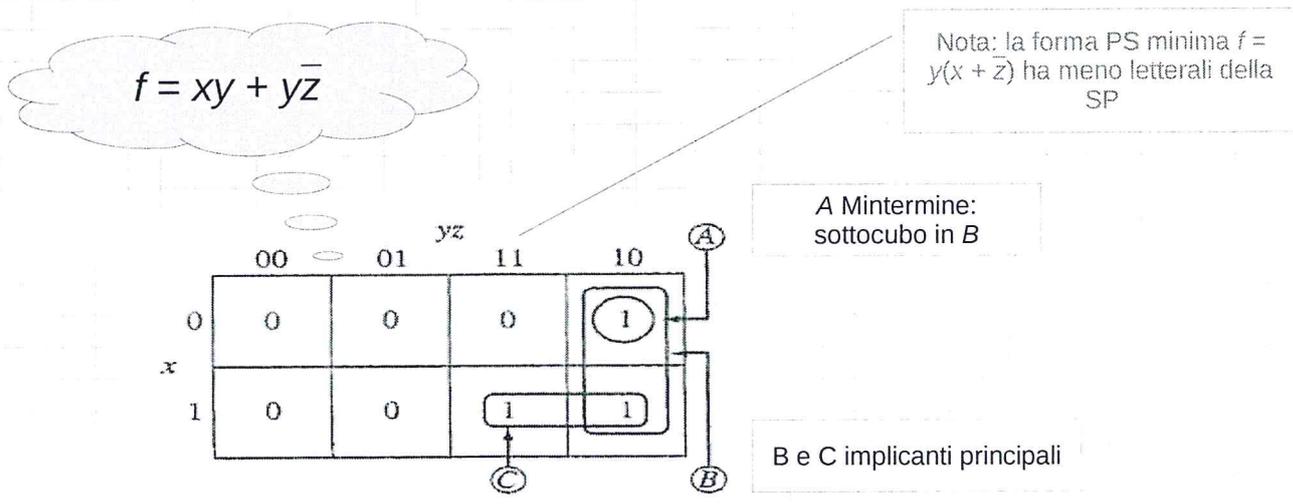
28

Implicati: esempi



Mappe e sintesi ottima

- > Sulla mappa è facile individuare gli implicanti
- > E capire se sono implicanti principali



Mappe e sintesi ottima (2)

- › Cercare tutti i sottocubi non contenuti in sottocubi di dimensioni maggiori
 - › Si parte dalla massima dimensione possibile: sottocubi di ordine n
 - › Corrispondono agli implicanti principali
- › Individuare gli implicanti principali essenziali
 - › Sono quelli che contengono mintermini non coperti da alcun altro implicante principale
 - › Appartengono a tutte le possibili liste di copertura irridondanti
 - › Sono quindi necessari in qualsiasi forma ottima

31

Mappe e sintesi ottima (3)

- › Se l'insieme di tutti gli implicanti principali essenziali copre la funzione, si ha la forma ottima
- › Altrimenti occorre aggiungere altri sottocubi principali fino a coprire tutti gli uni della funzione
 - › Si parte da quelli con maggiori dimensioni
 - › Si può avere un numero finito di possibilità tra le quali scegliere la forma ottima

32

Dalla funzione alla mappe

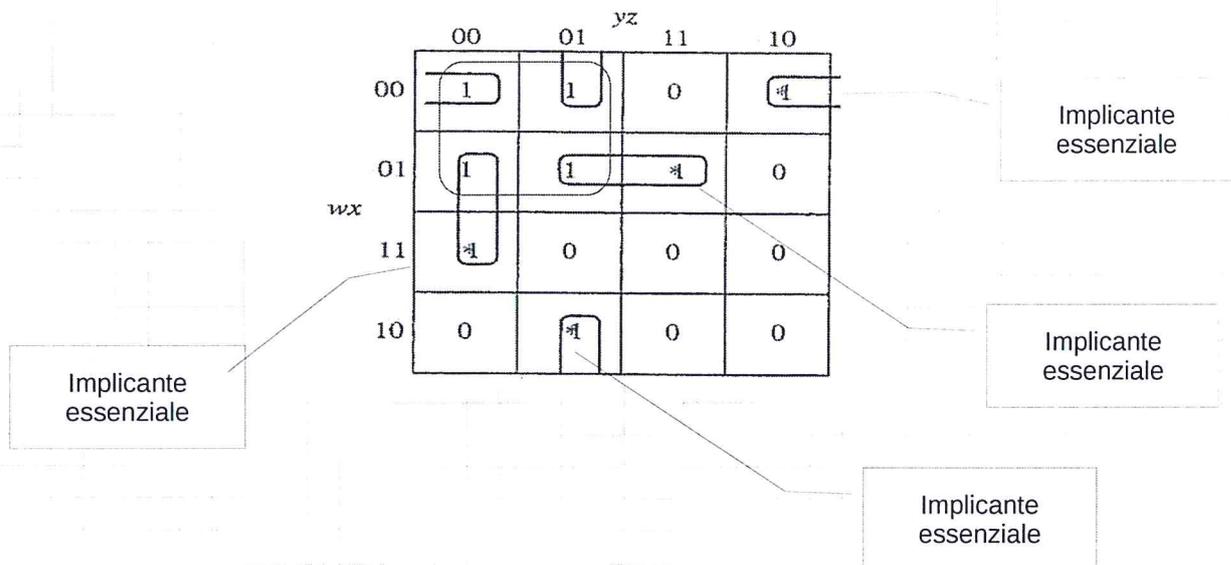
- Se la funzione è specificata da un'espressione booleana, per arrivare alla mappa non è necessario valutare la tabella di verità
 - Conviene riportare la funzione in una delle forme normali e tradurre i termini in sottocubi
 - Insiemi di 1 nella forma SP, o 0 forma PS

		00	01	11	10
00		0	0	0	0
01		1	1	0	0
11		1	1	1	0
10		0	0	1	0

$$f(w,x,y,z) = x\bar{y} + wxz + w\bar{x}yz$$

33

Esempi (1)



34

Esempi (2)

$$f(w,x,y,z) = \bar{w}\bar{x} + \bar{w}xz + yz$$

	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

	00	01	11	10
00	*1	1	1	*1
01	0	*1	1	0
11	0	0	*1	0
10	0	0	*1	0

Ottimizzare una funzione specificata tramite espressione logica
 $f = \bar{w}\bar{x} + \bar{w}z + yz$

35

Esempi (3)

	00	01	11	10
00	*1	0	0	*1
01	1	0	1	1
11	1	1	1	0
10	0	*1	0	0

Implicante essenziale

Modi diversi per coprire la funzione

Implicante essenziale

36

Esempi (4)

	yz				
	00	01	11	10	
wx	00	0	*1	1	0
	01	*1	1	1	1
	11	0	0	1	*1
	10	0	0	*1	0

	yz				
	00	01	11	10	
wx	00	*0	1	1	*0
	01	1	1	1	1
	11	*0	*0	1	1
	10	0	*0	1	*0

Sintesi SP e PS a confronto

$$f = wx + wz + yz + xy$$

$$f = (x + z)(w + y)$$

37

Sintesi di funzioni incomplete

- > Nella mappa sono contenuti 0, 1 e -
- > Il concetto è quello di usare le celle non specificate per ottenere implicanti (implicati) di ordine maggiore
- > Una volta coperti tutti gli "1" effettivi della funzione, alcuni "-" possono risultare non coperti
 - > La funzione effettivamente sintetizzata costituita dalla somma degli implicanti selezionati

38

Somma minima con "don't care"

- Si determinano tutti gli implicant principali considerando i "-" come "1"
- Si esaminano le coperture irridondanti di implicant principali
 - Si coprono solo gli "1" effettivi della funzione
 - Si parte dagli implicant essenziali
 - Tenendo conto solo degli 1 effettivi

39

Esempio

Implicante inutile perché fatto solo di "-"

	yz			
	00	01	11	10
00	1	1	*1	0
01	0	-	*1	0
11	1	-	0	-
10	1	0	0	-

Implicante essenziale

Di questi 2 implicant basta sceglierne uno

Implicante inutile perché l'unico "1" reale è già coperto da implicante di ordine maggiore

40

Mappe a 5 variabili (1)

- La sintesi tramite mappe può effettuarsi anche per 5 variabili
 - Con l'uso della simmetria speculare
 - Rispetto a un asse verticale
 - Con la sovrapposizione di 2 piani da 4 variabili
 - Secondo il valore della quinta variabile 0, 1
- Si possono formare implicanti in modi diversi
 - Sulle singole mappe
 - Con $x_5 = 0$ nei termini prodotto ci sarà \bar{x}_5
 - Con $x_5 = 1$ nei termini prodotto ci sarà x_5
 - A cavallo delle due mappe in posti corrispondenti
 - Nel termine non apparirà x_5

41

Mappe a 5 variabili (2)

	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	1	3	2	6	7	5	4
01	8	9	11	10	14	15	13	12
11	24	25	27	26	30	31	29	28
10	16	17	19	18	22	23	21	20

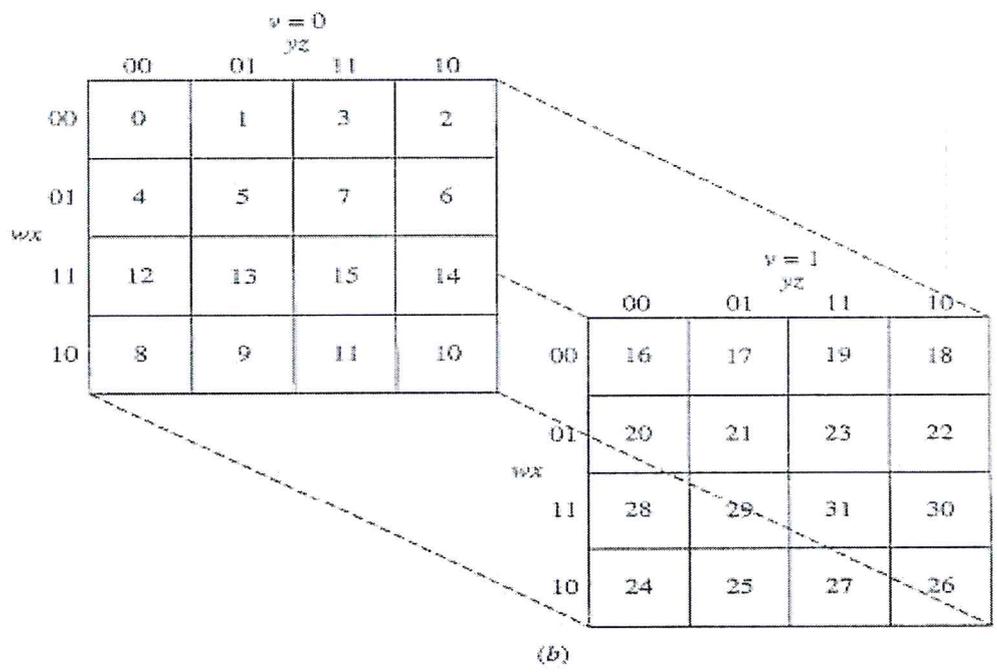
(a)

mo

42

Mappe a 5 variabili (3)

OK



Esempio SP a 5 variabili

	xyz							
	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1	1	1	1	*1	1	0	0
01	0	0	*1	0	0	*1	0	0
11	0	0	*1	0	0	*1	0	0
10	*1	1	1	0	0	*1	0	0

no

Esempio PS a 5 variabili

	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1	1	1	1	1	1	*0	*0
01	0	*0	1	*0	*0	1	0	0
11	0	*0	1	0	0	1	0	0
10	1	1	1	*0	0	1	*0	0

45

Mappe a 6 variabili (1)

- La sintesi tramite mappe può spingersi al massimo fino a 6 variabili
 - Con l'uso della *simmetria speculare*
 - Sui due assi orizzontale e verticale
 - Con la *sovrapposizione di 4 piani da 4 variabili*
 - Secondo le sequenze di combinazioni 00, 01, 11, 10
- Oltre le 6 variabili (già impegnative da gestire con le mappe) si usano *metodi algoritmici*
 - Algoritmo di Quine-McCluskey
 - Problema *NP* completo
 - Per reti di grande complessità si usano metodi euristici

46

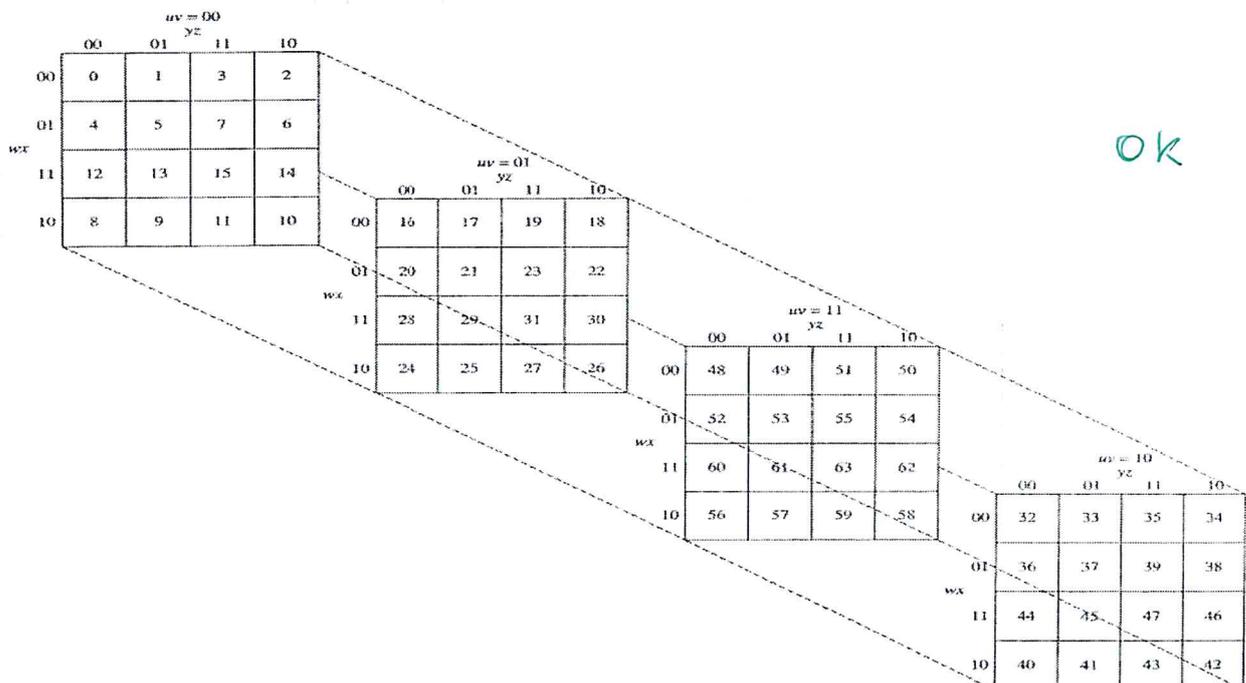
Mappe a 6 variabili (2)

		xyz							
		000	001	011	010	110	111	101	100
uvw	000	0	1	3	2	6	7	5	4
	001	8	9	11	10	14	15	13	12
	011	24	25	27	26	30	31	29	28
	010	16	17	19	18	22	23	21	20
	110	48	49	51	50	54	55	53	52
	111	56	57	59	58	62	63	61	60
	101	40	41	43	42	46	47	45	44
	100	32	33	35	34	38	39	37	36

(a)

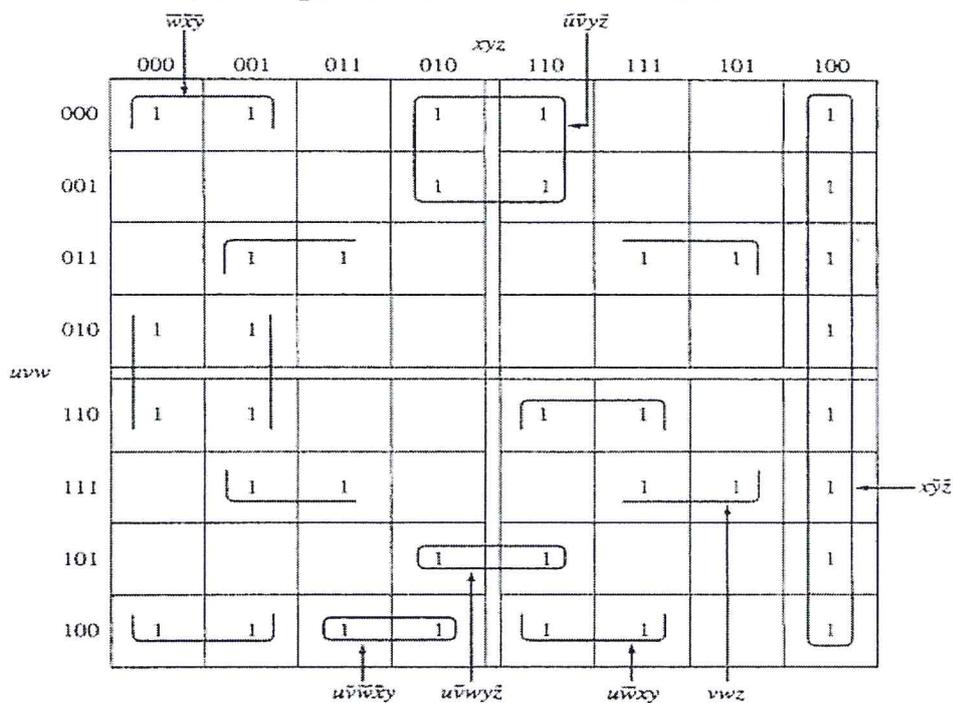
47

Mappe a 6 variabili (3)



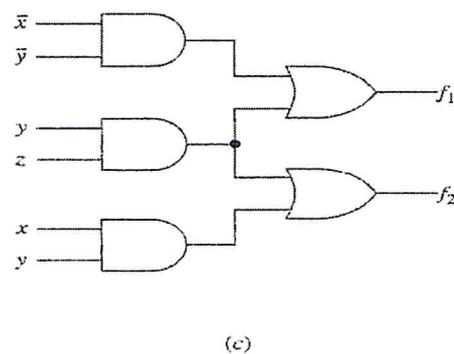
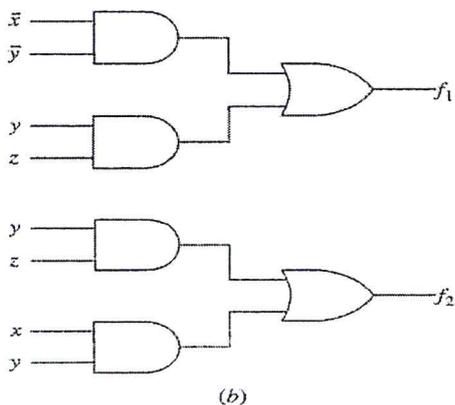
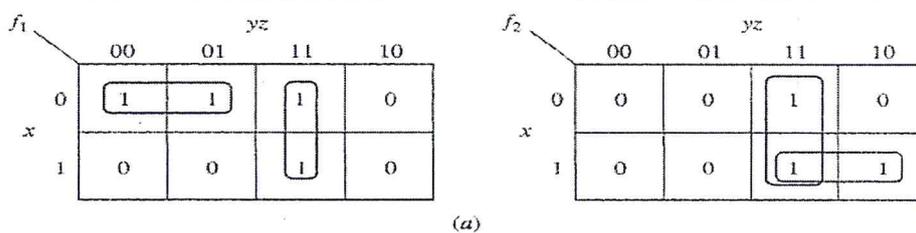
48

Esempio a 6 variabili



49

Funzioni a più uscite



"SALTA" la procedura di ottimizzazione

50

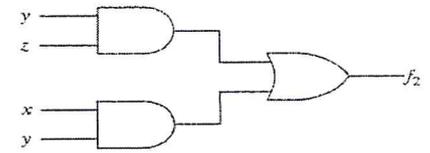
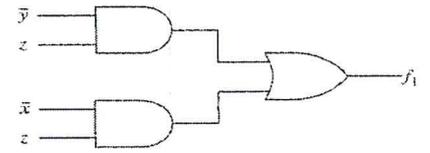
Funzioni a più uscite (2)

f_1

		yz			
		00	01	11	10
x	0	0	1	1	0
	1	0	1	0	0

f_2

		yz			
		00	01	11	10
x	0	0	0	1	0
	1	0	0	1	1

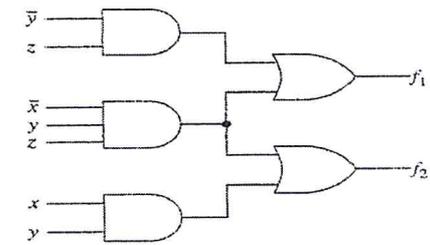


f_1

		yz			
		00	01	11	10
x	0	0	1	1	0
	1	0	1	0	0

f_2

		yz			
		00	01	11	10
x	0	0	0	1	0
	1	0	0	1	1



Ma ottimizzare ulteriormente le f_i è un buon punto di partenza.

Quine McCluskey (per trovare gli IMPLICANTI PRINCIPALI)

Una prima idea

- Si elencano i mintermini

$$xyzw = xzw$$

$$\bar{x}yz\bar{w}$$

$$x\bar{y}z\bar{w} =$$

ecc

- Si confronta ciascuno con tutti i seguenti
- Se se ne trovano che differiscono solo per una variabile (affermata/negata) si "seguono" e si scrive nella colonna a destra l'implicante di ORDINE MAGGIORE che li contiene
- Quelli rimasti non marcati SONO PRINCIPALI
- Si procede così per la colonna di ordine maggiore, ecc.

Per facilitare l'operazione, RIDURRE il numero di confronti

- conviene usare la notazione Binaria

1 : variabile affermata

0 : negata

- : assente

e raggrupparli secondo il numero di 1

(quelli che "fondano" differiscono solo per una variabile)

Ricerca degli essenziali e altre semplificazioni

- Tabella (IMPLICANTI PRINC) / (MINTERMINI DA COPRIRE)

- possibili semplificazioni

colonne o righe dominanti / dominate
(costo)