Linee di trasmissione su PCB

Modello

Per analizzare una linea di trasmissione, riconducendoci ai familiari principi di Kirchhoff, la scomponiamo nella cascata di infiniti elementi, di lunghezza infinitesima, ciascuno modellabile come in figura 1.

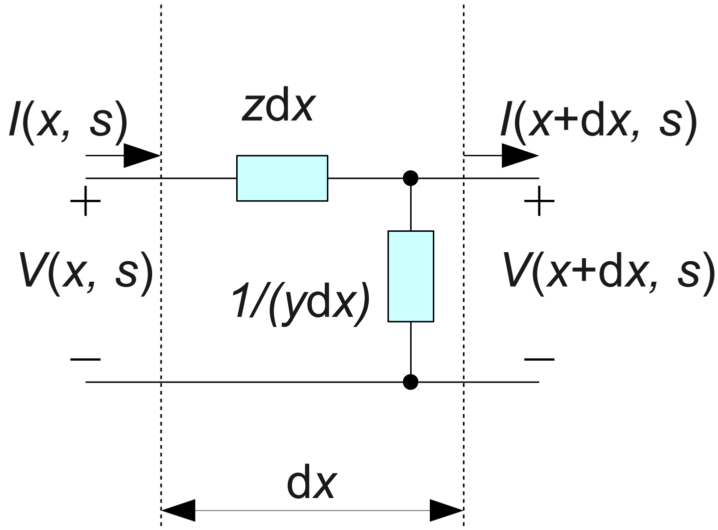

Figura 1: modello di elemento infinitesimo di linea di trasmissione. I parametri z e y rappresentano rispettivamente l'impedenza e l'ammettenza per unità di lunghezza della linea e dipendono dalle dimensioni e dal materiale.

Analisi generale nel dominio di Laplace

Se applichiamo al modello individuato le equazioni di Kirchhoff otteniamo subito il sistema di equazioni differenziali per la tensione e la corrente lungo la linea.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V(x,s)}{\partial x} = -z\, I(x,s) \\ \dfrac{\partial I(x,s)}{\partial x} = -y\, V(x,s) \end{cases} \tag{1}$$

Differenziando ancora rispetto alla *x* si ottengono due equazioni differenziali indipendenti del secondo ordine, di soluzione immediata.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V(x,s)}{\partial x^2} = zy\, V(x,s) \\ \dfrac{\partial^2 I(x,s)}{\partial x^2} = zy\, I(x,s) \end{cases} \tag{2}$$

Le soluzioni per $V(x, s)$ e per $I(x, s)$ saranno del tipo

$$\begin{cases} V(x,s)=A(s)\mathrm{e}^{-\sqrt{zy}\,x}+B(s)\,\mathrm{e}^{\sqrt{zy}\,x} \\ I(x,s)=C(s)\,\mathrm{e}^{-\sqrt{zy}\,x}+D(s)\,\mathrm{e}^{\sqrt{zy}\,x} \end{cases} \tag{3}$$

Le costanti, da ricavare a partire dalle condizioni iniziali, non sono tutte indipendenti in quanto devono rispettare le equazioni in (1). Quindi per esempio *C* e *D* possono essere espresse in funzione di *A* e *B*. Si ha

$$-\sqrt{zy}\,A(s)\mathrm{e}^{-\sqrt{zy}\,x}+\sqrt{zy}\,B(s)\mathrm{e}^{\sqrt{zy}\,x}=-z\,C(s)\mathrm{e}^{-\sqrt{zy}\,x}-z\,D(s)\,\mathrm{e}^{\sqrt{zy}\,x} \tag{4}$$

Da cui si ricava

$$C=\sqrt{\frac{y}{z}}A(s)=A\frac{(s)}{Z_0} \qquad D=-\sqrt{\frac{y}{z}}B(s)=-B\frac{(s)}{Z_0} \tag{5}$$

ove è stata introdotta l'impedenza caratteristica della linea:

$$Z_0=\sqrt{\frac{z}{y}} \tag{6}$$

Caso particolare della linea senza perdite

In generale, impedenza *z* e ammettenza *y* di linea per unità di lunghezza hanno componenti dissipative, induttive e capacitive. Si tratta quindi di funzioni in *s* non banali. Quindi sia l'esponente delle esponenziali nelle soluzioni in (3) sia l'impedenza caratteristica definita in (6) vanno valutate usando queste espressioni.
Un caso particolare significativo si ha quando la linea non presenta caratteristiche dissipative o queste sono comunque trascurabili. L'impedenza serie della linea sarà quindi prevalentemente induttiva, mentre l'ammettenza verso l'altro conduttore sarà sostanzialmente capacitiva. Si avra:

$$z=ls \qquad y=cs \tag{8}$$

Dove con *l* si è indicata l'induttanza per unità di lunghezza e con *c* la capacità per unità di lunghezza della pista.
Per l'esponente delle esponenziali si ottiene

$$\sqrt{zy}=s\,\sqrt{lc}=s\,v^{-1} \tag{9}$$

L'introduzione del simbolo *v* - come velocità - è giustificata dal fatto che in questo caso le esponenziali[1] esprimono proprio un ritardo proporzionale alla coordinata spaziale.
Per l'impedenza caratteristica invece si ottiene:

$$Z_0=\sqrt{\frac{z}{y}}=\sqrt{\frac{l}{c}}=R_0 \tag{10}$$

Si osserva che nell'espressione è scomparsa la variabile *s* e si è ottenuto un valore costante reale, che possiamo definire resistenza caratteristica della linea non dissipativa.

---

1 Ricordando la proprietà della trasformata di Laplace per cui $L[f(t-\tau)u(t-\tau)] = \mathrm{e}^{-s\tau t}\,L[f(t)]$

Risposta della linea al gradino

Nel mondo digitale, la cosa più significativa è la valutazione del modo con cui si propaga un fronte ripido, che rappresenta con ottima approssimazione una transizione di stato logico.
Cercando un caso abbastanza completo consideriamo la resistenza interna del buffer che pilota la linea e la resistenza[2] del carico. La linea ha lunghezza x_0.
Facciamo riferimento allo schema in figura 2.

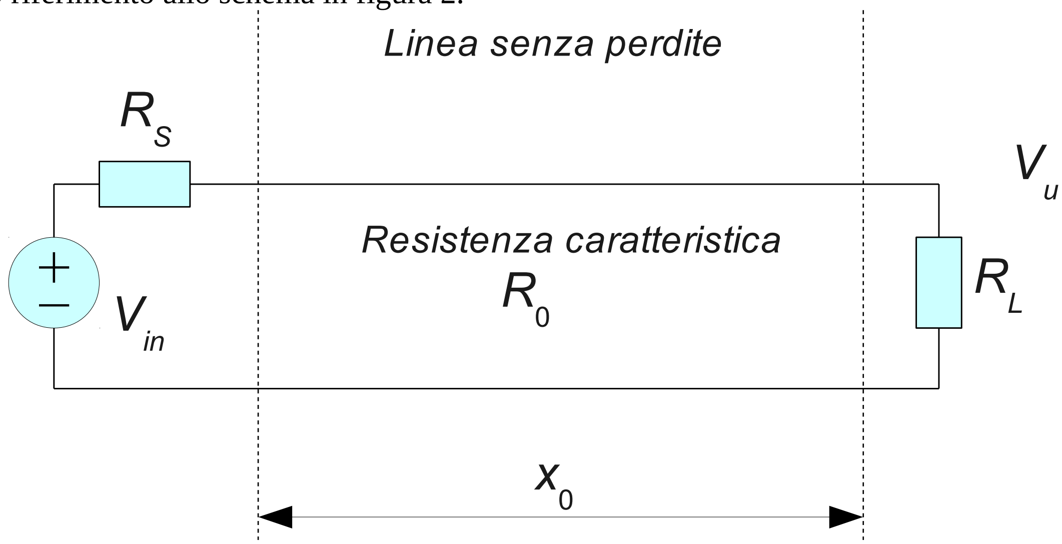

Figura 2: Caso del buffer che pilota un carico digitale attraverso una linea di trasmissione senza perdite realizzata sul PCB.

Se il generatore di ingresso pone sulla linea un gradino ideale, abbiamo le seguenti condizioni al contorno.

$$\begin{cases} V(0,s)=\dfrac{V_0}{s}-R_S\, I(0,s) \\ V(x_0,s)=R_L\, I(x_0,s) \end{cases} \tag{11}$$

Sostituiamo le condizioni iniziali nell'espressione della soluzione, considerando l'ipotesi di linea non dissipativa. Si ha[3]:

$$\begin{cases} A+B=\dfrac{V_0}{s}-\dfrac{R_S}{R_0}[A-B] \\ A\,\mathrm{e}^{-st_0}+B\,\mathrm{e}^{st_0}=\dfrac{R_L}{R_0}[A\,\mathrm{e}^{-st_0}-B\,\mathrm{e}^{st_0}] \end{cases} \tag{12}$$

Risolviamo questo sistema.

2 In realtà spesso il carico ha natura capacitiva, ma questo può complicare significativamente l'analisi.
3 Omettiamo per semplicità di esplicitare la dipendenza da *s* di *A* e *B*.

$$\begin{cases} A\left(1+\dfrac{R_S}{R_0}\right)+B\left(1-\dfrac{R_S}{R_0}\right)=\dfrac{V_0}{s} \\ A\,e^{-s t_0}\left(1-\dfrac{R_L}{R_0}\right)+B\,e^{s t_0}\left(1+\dfrac{R_L}{R_0}\right)=0 \end{cases} \tag{13}$$

Si ottiene quindi:

$$\begin{cases} A=\dfrac{1}{\Delta}\dfrac{V_0}{s}e^{s t_0}\left(1+\dfrac{R_L}{R_0}\right) \\ B=-\dfrac{1}{\Delta}\dfrac{V_0}{s}e^{-s t_0}\left(1-\dfrac{R_L}{R_0}\right) \end{cases} \tag{14}$$

Per completezza scriviamo l'espressione del determinante Δ della matrice del sistema.

$$\Delta=\left(1+\frac{R_S}{R_0}\right)\left(1+\frac{R_L}{R_0}\right)e^{s t_0}-\left(1-\frac{R_S}{R_0}\right)\left(1-\frac{R_L}{R_0}\right)e^{-s t_0} \tag{15}$$

Avendo trovato i due coefficienti della soluzione, siamo in grado di valutare l'andamento in *s*, e quindi nel tempo, della forma d'onda in qualsiasi punto della linea. Ci interessa in particolare valutare l'andamento della tensione sul carico.

$$V(x_{0,}s)=2\frac{1}{\Delta}\frac{V_0}{s}\frac{R_L}{R_0}=2\frac{V_0}{s}\frac{R_L R_0}{(R_0+R_S)(R_0+R_L)}e^{-s t_0}\frac{1}{1-k\,e^{-2 s t_0}} \tag{16}$$

In questa espressione è stato introdotto il parametro *k*, che dipende dalla relazione tra le resistenze del circuito e la resistenza caratteristica della linea:

$$k=\frac{(R_0-R_S)(R_0-R_L)}{(R_0+R_S)(R_0+R_L)} \tag{17}$$

Osserviamo che, essendo le resistenze grandezze positive, si ha

$$-1\le k\le 1 \tag{18}$$

Inoltre *k* si annulla se almeno una delle due resistenze del circuito, quella del carico o quella associata al generatore, è esattamente uguale alla resistenza caratteristica della linea.
Valutiamo il valore della tensione sul carico a regime:

$$\lim_{s\to 0} s\,V(x_0,s)=2\,V_0\frac{R_L R_0}{(R_0+R_S)(R_0+R_L)(1-k)}=2\,V_0\frac{R_L R_0}{2\,R_0 R_S+2\,R_0 R_L}=V_0\frac{R_L}{R_S+R_L} \tag{19}$$

Come era prevedibile, a regime resta solo la partizione tra la resistenza del generatore e quella del carico. È però importante analizzare l'andamento della risposta nel tempo. A questo proposito osserviamo che l'ultimo termine nella (16) rappresenta la somma di una serie geometrica infinita, convergente. Possiamo quindi riscrivere la (16) come:

$$V(x_{0,}s)=2\frac{V_0}{s}\frac{R_L R_0}{(R_0+R_S)(R_0+R_L)}\mathrm{e}^{-s t_0}\sum_{i=0}^{\infty}k^i\mathrm{e}^{-2 i s t_0} \tag{20}$$

Ricordando il senso dell'esponenziale nella trasformata di Laplace, riconosciamo un andamento a gradini, a partire da un primo valore nell'istante t_0 e con nuovi valori a intervalli di $2t_0$, pari proprio al tempo impiegato dal segnale a percorrere il percorso di andata e ritorno sulla linea.
Ricorrendo all'espressione delle somme parziali della serie geometrica, otteniamo il valore dell'ampiezza dei singoli gradini:

$$V_i=2V_0\frac{R_L R_0(1-k^i)}{(R_0+R_S)(R_0+R_L)(1-k)}=V_0\frac{R_L}{(R_S+R_L)}(1-k^i) \tag{20}$$

Ricapitolando, i valori ricavati con la formula (21), V_0, V_1, V_2, V_3, … sono relativi agli istanti t_0, $3t_0$, $5t_0$, $7t_0$, …
Si nota una importante differenza nella forma della risposta in funzione del segno del parametro k. Per esempio, nel caso di generatore con bassa resistenza interna e carico di resistenza elevata, quindi con R_0 intermedio ai due valori di resistenza R_S e R_L, si ha k negativo e una gradinata che si avvicina al suo valore asintotico alternando valori maggiori e minori. Aumentando la resistenza interna della sorgente si arriva al caso opposto in cui la gradinata è monotona crescente.
In figura 3, 4 e 5 sono mostrati diversi casi di andamento della tensione di uscita, con k negativo, positivo e nullo, ottenuti con il simulatore LTSpice.

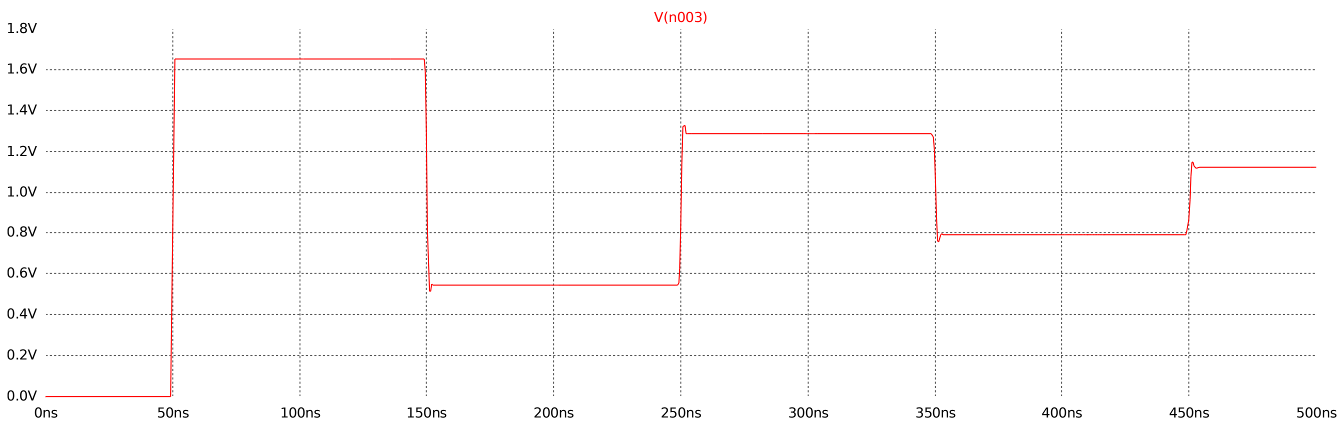

Figura 3: Linea di trasmissione da 50 Ω, generatore con resistenza interna di 5 Ω e carico da 500 Ω .

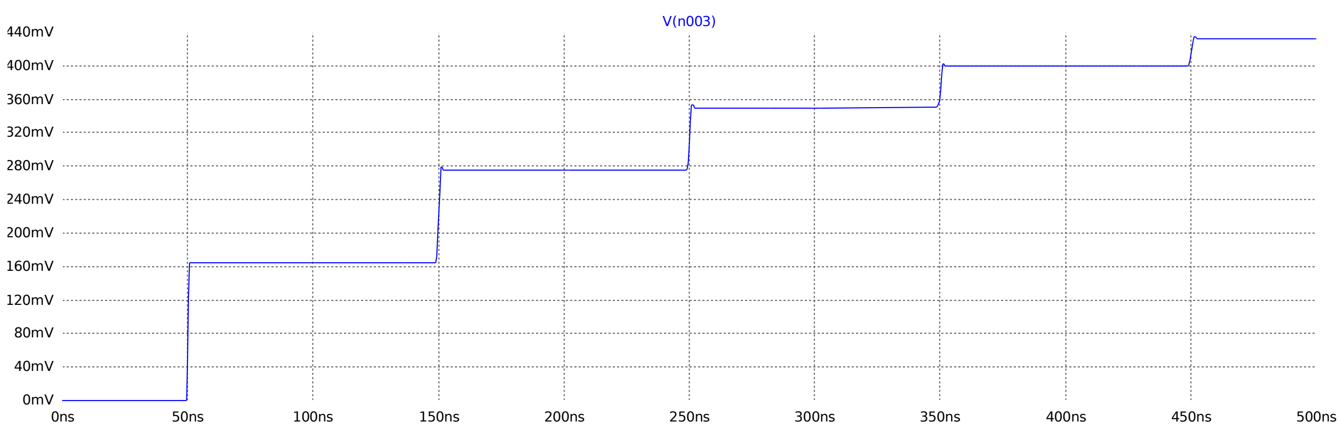

Figura 4: Linea di trasmissione da 50 Ω, generatore con resistenza interna di 500 Ω e carico da 500 Ω.

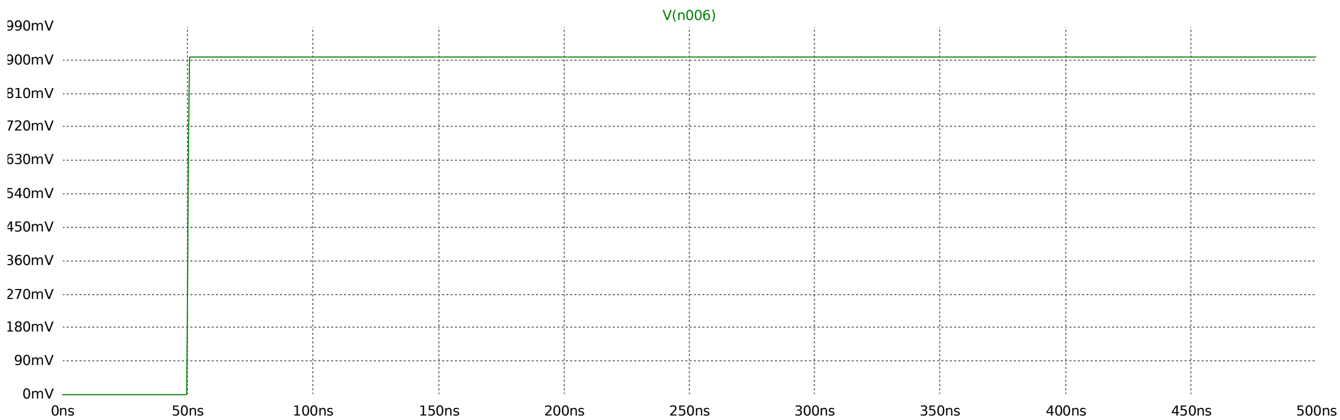

Figura 5: Linea di trasmissione da 50 Ω, generatore con resistenza interna di 50 Ω e carico da 500 Ω.

Appare evidente dal risultato ottenuto che per avere integrità del segnale è importante che almeno uno dei due valori R_S o R_L coincida con il valore della resistenza caratteristica della linea. Questo può essere ottenuto modificando la configurazione di ingresso o di uscita, e/o dimensionando la linea di trasmissione in modo opportuno.