Sulla valutazione di espressioni di *N* termini combinati usando la stessa operazione (*N* - 1) volte

Riflessione 10/18

Roberto Roncella

Sommario

- Riflessione sul modo di valutare espressioni con più variabili
- Proprietà commutativa
- Proprietà associativa
- Dimostrazione dell'indipendenza del risultato nel caso di operatori commutativi e associativi

Espressioni con *N* variabili

L'espressione che vogliamo valutare è del tipo:

$$a_1 \odot a_2 \odot a_3 \ldots \odot a_N \tag{1}$$

dove gli operandi a_i appartengono tutti a uno stesso insieme e il risultato dell'operazione $a \odot b$ è anch'esso un elemento dello stesso insieme (proprietà della chiusura). Per il momento non assumiamo per l'operazione alcuna particolare proprietà, quindi il risultato dell'espressione dipende **dall'ordine** degli operandi e **dal modo** con cui le operazioni sono raggruppate.

Per esplicitare il modo con cui le variabili sono raggruppate e stabilire quindi la successione delle operazioni da eseguire si usano normalmente le parentesi. In assenza di parentesi, si intende che le operazioni sono eseguite nell'ordine in cui appaiono, da sinistra a destra.

Per prima cosa valutiamo quanti possibili casi e quindi quanti possibili risultati diversi si possono ottenere. Riguardo all'ordine, il numero dei casi è dato dalle permutazioni delle N variabili, e quindi è pari a $N!$ cioè al fattoriale.

Per un dato ordine delle variabili si possono inoltre avere $(N - 1)!$ modi diversi di raggruppare le operazioni. Infatti la prima operazione tra 2 termini adiacenti (che dà luogo a un termine pari al risultato dell'operazione) può essere scelta tra una delle possibili $(N - 1)$ coppie diverse e una volta eseguita l'operazione avremo un'espressione con una variabile in meno. Quindi il risultato $(N - 1)!$ si ottiene procedendo iterativamente fino all'ultima coppia da combinare.

In totale le diverse possibilità $P(N)$ sono

$$P(N) = N!(N-1)! \tag{2}$$

Le possibilità crescono rapidamente, come si vede nella tabella seguente:

N	*P(N)*
2	2
3	12
4	144
5	2880
6	86400
7	3628800
8	203212800
9	14631321600

A titolo di esempio, esplicitiamo tutte le possibilità di valutazione di una espressione a 2 variabili, che sono solo 2:

$a \odot b$; $b \odot a$

e poi a 3 variabili, che sono 12:

$a \odot b \odot c$; $a \odot (b \odot c)$;
$a \odot c \odot b$; $a \odot (c \odot b)$;
$b \odot a \odot c$; $b \odot (a \odot c)$;
$b \odot c \odot a$; $b \odot (c \odot a)$;
$c \odot a \odot b$; $c \odot (a \odot b)$;
$c \odot b \odot a$; $c \odot (b \odot a)$.

Proprietà dell'operazione

Se l'operazione $\odot$ gode della proprietà commutativa e/o di quella associativa, ci saranno conseguenze importanti sul risultato dell'espressione, che in molti casi sarà uguale. Ricordiamo la definizione delle proprietà citate e valutiamo l'impatto nel calcolo dell'espressione.

Proprietà commutativa

Un'operazione gode della proprietà commutativa se il risultato non cambia invertendo l'ordine degli operandi. In formula:

$$a \odot b = b \odot a \qquad (3)$$

Quindi se si esaminano tutti i modi di valutare un'espressione di N variabili, tenendo presente che il risultato si ottiene eseguendo N-1 operazioni e che ogni operazione può essere svolta indifferentemente in 2 modi, si otterranno gruppi di $2^{(N-1)}$ modi il cui risultato è uguale tra loro. Per esempio, nel caso di operazioni commutative, nel caso di 3 variabili i risultati diversi saranno al più 12/4 = 3.

Elenchiamo di seguito le possibili valutazioni che possono dare risultati diversi:

$a \odot b \odot c$; $a \odot c \odot b$; $b \odot c \odot a$.

Proprietà associativa

Un'operazione gode della proprietà associativa se la combinazione di 3 elementi nell'ordine assegnato dà lo stesso risultato indipendentemente da come si raggruppano le variabili. In formula:

$$a \odot b \odot c = a \odot (b \odot c) \qquad (4)$$

Se il modo di raggruppare gli operandi non ha effetto sul risultato, i possibili risultati diversi si limitano a $N!$.

Osservazione

Nei principali sistemi algebrici e anche nell'algebra di Boole, le operazioni godono contemporaneamente di entrambe le proprietà. È però possibile trovare operazioni che godono dell'una proprietà e non dell'altra.

Vediamo un esempio di operazione commutativa ma non associativa:

$$a \odot b \stackrel{\text{def}}{=} 2a + 2b \tag{5}$$

Infatti

$$a \odot b \odot c = 2(2a + 2b) + c = 4a + 4b + c \neq a \odot (b \odot c) = 2a + 2(2b + 2c) = 2a + 4b + 4c$$

Un esempio di operazione associativa ma non commutativa può essere trovato esaminando l'operazione di composizione di funzioni nell'insieme delle funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$f \odot g \stackrel{\text{def}}{=} f \circ g = f(g(x)) \tag{6}$$

La composizione di funzioni in genere non gode della proprietà commutativa, mentre è sicuramente associativa.

Espressione con operazione commutativa e associativa

Nel caso in cui sia vera sia la proprietà commutativa sia la associativa (e solo in questo) possiamo affermare che il risultato della valutazione di una espressione con N termini sia indipendente dall'ordine con cui si valutano le singole operazioni.

Iniziamo con il dimostrarlo per espressioni di 2 e 3 termini.

Nel caso di operazioni di 2 termini l'uguaglianza deriva direttamente dalla proprietà commutativa. Nel caso di espressioni di 3 termini, l'uguaglianza si ottiene dalla combinazione della proprietà commutativa (per cui i possibili risultati sono 3, come visto precedentemente) con quella associativa. Nel seguito si mostra come i 3 possibili risultati nel caso in cui vale la proprietà commutativa sono uguali tra loro se vale anche la proprietà associativa:

$a \odot b \odot c =^{\text{ass}} a \odot (b \odot c) =^{\text{comm}} a \odot (c \odot b) =^{\text{ass}} a \odot c \odot b$
$a \odot b \odot c =^{\text{ass}} a \odot (b \odot c) =^{\text{comm}} = b \odot c \odot a.$

Ora possiamo ipotizzare che la proprietà di indipendenza dall'ordine sia vera per N termini (N - 1 operazioni) e quindi dimostrare che, in questa ipotesi, è vera per N + 1 termini. In questo modo, per induzione, si ha che la proprietà di invarianza dall'ordine è vera per espressioni qualsiasi.

Consideriamo un'espressione di (N + 1) termini, a_1, a_2, … , a_{N+1}, che ordiniamo arbitrariamente. Per il calcolo finale ci potremo sempre ricondurre alla combinazione di 2 termini, A e B, ciascuno sicuramente con al più N termini. Per l'ipotesi fatta, A e B possono essere calcolati in qualsiasi modo dando sempre il solito risultato. Il termine A è quello che contiene a_{N+1} e ricorrendo alla proprietà commutativa, si può sempre calcolare il risultato come $A \odot B$.

Le variabili in A possono essere ordinate in ordine di pedice decrescente e quelle in B in ordine di pedice crescente. L'ultima variabile del termine A, se diversa da a_{N+1} (che sarà in prima posizione), può essere portata nel termine di sinistra B per la proprietà associativa.

$$A \odot B = (a_{N+1} \odot \ldots \odot a_j \odot a_i) \odot B = (a_{N+1} \odot \ldots \odot a_j) \odot a_i \odot B = (a_{N+1} \odot \ldots \odot a_j) \odot (a_i \odot B) = A' \odot B'$$

Procedendo in questo modo si trasferiscono a destra tutti i termini tranne il primo, a_{N+1}. A ogni passaggio il termine *B'* può essere riordinato con le variabili in ordine crescente, fino ad arrivare a B_f che contiene tutte le variabili tranne a_{N+1}. Alla fine si ha l'espressione

$$A\odot B=a_{N+1}\odot B_f=B_f\odot a_{N+1}=a_1\odot a_2\odot...\odot a_{N+1}$$

che corrisponde al calcolo eseguito combinando successivamente tutte le variabili in ordine crescente. Quindi il risultato viene sempre lo stesso, indipendentemente dall'ordine e dai raggruppamenti iniziali, come si voleva dimostrare.

In conclusione, per qualsiasi valore di *N* il risultato della combinazione di *N* termini con una operazione associativa e commutativa è lo stesso, indipendentemente dall'ordine con cui sono prese le variabili e dal modo con cui sono raggruppate.