

# ARCHITETTURA DEI SISTEMI ELETTRONICI

## LEZIONE N° 4

- Modulo
- Modulo “ $M$ ”
- Rappresentazione di numeri con segno
  - Modulo e segno
  - Complemento a 2
  - Complemento a 1
  - Traslazione
- Operazioni con iteri relativi

A.S.E.

4.1

## Richiami

- Base 2, 3, 4, 5, 8, 10, 12, 16
- Aritmetica binaria
- Conversione da base “ $N$ ” a base 10
- Conversione da base 10 a base “ $N$ ”
- Modulo
- Modulo “ $M$ ”

A.S.E.

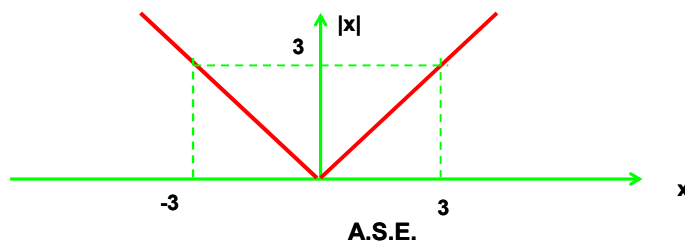
4.2

## Modulo

- Il modulo di un numero è il valore assoluto del numero stesso

– si indica con due barre verticali  $|N|$

- **Risulta:**  $|X| = X$  se  $X > 0$  e  $|X| = -X$  se  $X < 0$
- **Esempio**  $|27| = 27$ ;  $|-31| = 31$ ;  $|2.7| = 2.7$ ;  $|-0.531| = 0.531$
- **Graficamente si ha:**



4.3

## Osservazione

- Dati due numeri arbitrari  $X$  e  $Y$ , con  $Y \neq 0$ , allora

$$X = Q \cdot Y + R, \quad 0 \leq R < |Y|$$

- Se  $R = 0$  allora  $X$  è divisibile per  $Y$
- Si può dimostrare che  $R$  e  $Q$  esistono e sono unici
- **Esempi**

$$X=19, Y=7 \Rightarrow Q=2, R=5$$

$$X=19, Y=-7 \Rightarrow Q=-2, R=5$$

$$X=-19, Y=7 \Rightarrow Q=-3, R=2$$

$$X=-19, Y=-7 \Rightarrow Q=3, R=2$$

$$X=-35, Y=-7 \Rightarrow Q=5, R=0$$

A.S.E.

4.4

## Modulo “M” (1)

- “X” modulo “M” è il “resto” della divisione di “X” diviso “M” (intero positivo); si indica con due barre verticali e pedice M

$$R = |X|_M$$

- “R” è detto anche residuo e risulta

$$X = [X / M] \cdot M + |X|_M$$

- Esempio

Intero  $\leq$  di X diviso M

$$|25|_7 = 4 ; |25|_{10} = 5 ; |-25|_7 = 3 ; |124.24|_3 = 1.24 ; |124.24|_{10} = 4.24$$

A.S.E.

4.5

## Modulo “M” (2)

- Altra interpretazione: dato un numero X e detto R il modulo “M” di X
- 1° caso  $0 \leq X < M$  segue  $R = X$
- 2° caso  $X \geq M$  si toglie tante volte M in modo che risulti  $0 \leq R < M$
- 3° caso  $X \leq 0$  si somma tante volte M in modo che risulti  $0 \leq R < M$

A.S.E.

4.6

## Alcune proprietà

- Dati due numeri  $X$  e  $Z$  risulta

$$|X \pm Z|_M = \left| |X|_M \pm |Z|_M \right|_M$$

$$|X + KM|_M = |X|_M$$

$$|X \cdot Z|_M = \left| |X|_M \cdot |Z|_M \right|_M$$

A.S.E.

4.7

## Osservazione 1

- L'operazione modulo " $M$ " in generale non è biunivoca , ovvero dato il numero  $X$  è univocamente determinato  $R = |X|_M$   
Dato  $R$  esistono infiniti numeri che hanno per residuo  $R$  stesso
- L'operazione modulo " $M$ " è biunivoca se risulta

$$-\frac{M}{2} \leq X \leq \frac{M}{2} - 1$$

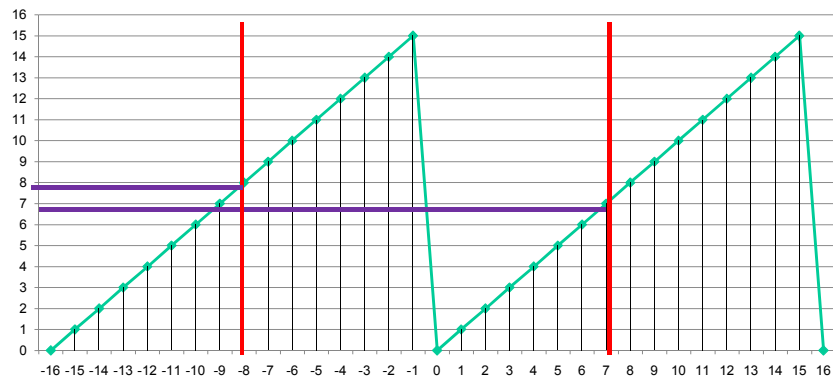
A.S.E.

4.8

## Esempio grafico

- Per  $M = 16$  risulta
 
$$-\frac{M}{2} = -8$$

$$\frac{M}{2} - 1 = 7$$



A.S.E.

4.9

## Osservazione 2

- Data una base  $B$ , se si dispone di un numero limitato di digit ( $K$ ), se si esegue l'addizione di due numeri la cui somma eccede  $B^K$ , allora la somma  $S$  assume il valore

$$S = |A + B|_{B^K}$$

- Esempi In base 10, disponendo di sole due cifre si ha:

$$87 + 54 = 141 \Rightarrow 41$$

A.S.E.

4.10

## Numeri binari con segno

- Il numero massimo di bit usato da un calcolatore è noto e fisso
  - Solitamente è : 4 o 8 o 16 o 32 (Word)
  - 8 bit formano un Byte
- Non esiste un apposito simbolo per il segno
- Si usa il bit più significativo per indicare il segno
  - 0 = +
  - 1 = -
- Si hanno varie tecniche di codifica
  - Modulo e segno
  - Complemento a 2
    - Complemento a 1
    - Traslazione ( cambia la codifica del segno)

A.S.E.

4.11

## Modulo e segno (1)

- Operando in base “B” e disponendo di “N” cifre
- Si può numerare  $B^N$  oggetti distinti  $[0 + (B^N-1)]$
- Dovendo numerare sia oggetti positivi, che negativi, si sceglie di “centrare l’intervallo

$$1 - \frac{B^N}{2} < X < \frac{B^N}{2} - 1$$

A.S.E.

4.12

## Modulo e segno (2)

- **Assumendo**

- **B** > base in cui si opera
- **N** > Digit (cifre) a disposizione (lunghezza della parola)
- **X** > numero di cui si vuole eseguire la conversione
- **X<sub>MS</sub>** > rappresentazione di X in M.S.

- **Risulta**

$$\text{per } 0 \leq X \leq \frac{B^N}{2} - 1 \quad \text{si ha} \quad X_{MS} = X$$

$$\text{per } 1 - \frac{B^N}{2} \leq X \leq 0 \quad \text{si ha} \quad X_{MS} = |X| + \frac{B^N}{2}$$

- **In Base 2 risulta**

$$\text{per } 0 \leq X \leq 2^{N-1} - 1 \quad \text{si ha} \quad X_{MS} = X$$

$$\text{per } 1 - 2^{N-1} \leq X \leq 0 \quad \text{si ha} \quad X_{MS} = |X| + 2^{N-1}$$

**A.S.E.**

**4.13**

## Esempio 1

- **Disponendo di 3 digit in base 10**

- Stabilire il max e min rappresentabile
- Convertire in MS i numeri 25, 147, -13, -258

- **Essendo B = 10 e N = 3, risulta**

$$1 - \frac{B^N}{2} \leq X \leq \frac{B^N}{2} - 1 \quad \langle -499 \leq X \leq 499 \rangle$$

$$25 \Rightarrow 025$$

$$147 \Rightarrow 147$$

$$-13 \Rightarrow 13 + 500 = 513$$

$$-258 \Rightarrow 258 + 500 = 758$$

**A.S.E.**

**4.14**

## Esempio 2

- **Disponendo di 8 digit in base 2**
  - Stabilire il max min rappresentabile
  - Convertire in MS i numeri 1111 (15), 1110101 (117), -10111 (-23), -1011001 (-89)

$$1 - 2^7 \leq X \leq 2^7 - 1 \quad \langle -127 \leq X \leq 127 \rangle$$

$$1111 \Rightarrow 00001111$$

$$1110101 \Rightarrow 01110101$$

$$-10111 \Rightarrow 10010111$$

$$-1011001 \Rightarrow 11011001$$

A.S.E.

4.15

## Modulo e segno (3)

- **Se si dispone di “n” bit**

$$w = d_{n-1}d_{n-2} \cdots d_0$$

- **Il corrispondente in base 10 è**

$$w_{10} = (-1)^{d_{n-1}} (d_{n-2}2^{n-2} + d_{n-3}2^{n-3} + \cdots d_02^0)$$

- **Il range dei numeri risulta**

$$1 - 2^{n-1} \leq w_{10} \leq 2^{n-1} - 1$$

- **Esempio n = 4**

$$0101 = (-1)^0 \times 5 = 5$$

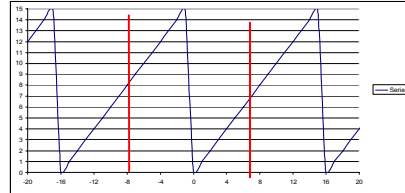
$$1110 = (-1)^1 \times 6 = -6$$

A.S.E.

4.16



## Complemento a 2 (1)



- **Assumendo**

- **B** > base in cui si opera = 2
- **N** > Digit (cifre) a disposizione (lunghezza della parola)
- **X** > numero di cui si vuole eseguire la conversione
- **X<sub>C2</sub>** rappresentazione di X in C2

- **Risulta**

per  $0 \leq X \leq 2^{N-1} - 1$  si ha  $X_{C2} = X = \left| 2^N + X \right|_{2^N}$

per  $-2^{N-1} \leq X \leq 0$  si ha  $X_{C2} = X + 2^N = \left| 2^N + X \right|_{2^N}$

**A.S.E.**

**4.17**

## Esempio

- **Disponendo di 8 digit in base 2**

- Stabilire il max e min rappresentabile
- Convertire in C2 i numeri 1111 (15), 1110101 (117), -10111 (-23), -1011001 (-89)

$$-2^7 \leq X \leq 2^7 - 1 \quad \langle -128 \leq X \leq 127 \rangle$$

$$1111 \Rightarrow 00001111$$

$$1110101 \Rightarrow 01110101$$

$$-10111 \Rightarrow 100000000 - 10111 = 11101001$$

$$-1011001 \Rightarrow 100000000 - 1011001 = 10100111$$

**A.S.E.**

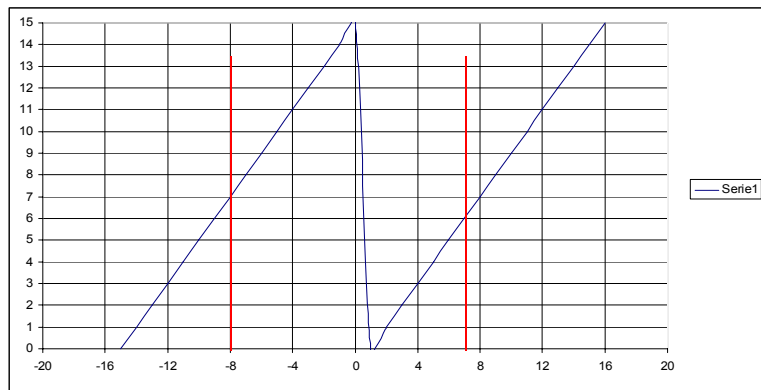
**4.18**

## Esempio grafico

- Per  $B = 2$  e  $N = 4$ , si ha

$$B^{N-1} = 8, \quad -8 < X < 8-1 = 7$$

per  $0 \leq X \leq 7 \Rightarrow Y = X$   
 per  $-8 \leq X < 0 \Rightarrow Y = X + 16$



19

## Complemento a 2 (2)

- Se si dispone di “n” bit

$$w = d_{n-1}d_{n-2} \cdots d_0$$

- Il corrispondente in base 10 è

$$w_{10} = (-2^{n-1}) \times d_{n-1} + (d_{n-2}2^{n-2} + d_{n-3}2^{n-3} + \cdots d_02^0)$$

- Il range dei numeri risulta

$$-2^{n-1} \leq w_{10} \leq 2^{n-1} - 1$$

- Esempio  $n = 4$

$$0101 = (-8) \times 0 + 5 = 5 \quad 1110 = (-8) \times 1 + 6 = -2$$

A.S.E.

4.20

## Complemento a 1 (1)

- **Assumendo**
  - Bit a disposizione (lunghezza della parola)  $N$
  - $X$  numero di cui si vuole eseguire la conversione
  - $X_{C1}$  rappresentazione di  $X$  in C1
- **Risulta**

$$\text{per } 0 \leq X \leq 2^{N-1} - 1 \quad \text{si ha} \quad X_{C1} = X$$

$$\text{per } 1 - 2^{N-1} \leq X \leq 0 \quad \text{si ha} \quad X_{C1} = X + 2^N - 1$$

A.S.E.

4.21

## Esempio

- **Disponendo di 8 digit in base 2**
  - Stabilire il max min rappresentabile
  - Convertire in C1 i numeri 1111 (15), 1110101 (117), -10111 (-23), -1011001 (-89)

$$1 - 2^7 \leq X \leq 2^7 - 1 \quad \langle -127 \leq X \leq 127 \rangle$$

$$1111 \Rightarrow 00001111$$

$$1110101 \Rightarrow 01110101$$

$$-10111 \Rightarrow 100000000 - 1 - 10111 = 11111111 - 10111 = 11101000$$

$$-1011001 \Rightarrow 100000000 - 1 - 1011001 = 11111111 - 1011001 = 10100110$$

A.S.E.

4.22

## Complemento a 1 (2)

- Se si dispone di “n” bit

$$w = d_{n-1}d_{n-2} \cdots d_0$$

- Il corrispondente in base 10 è

$$w_{10} = (1 - 2^{n-1}) \times d_{n-1} + (d_{n-2}2^{n-2} + d_{n-3}2^{n-3} + \cdots + d_02^0)$$

- Il range dei numeri risulta

$$1 - 2^{n-1} \leq w_{10} \leq 2^{n-1} - 1$$

- Esempio n = 4

$$0101 = (1 - 8) \times 0 + 5 = 5 \quad 1110 = (1 - 8) \times 1 + 6 = -1$$

A.S.E.

4.23

## Traslazione (1)

- Assumendo
  - Bit a disposizione (lunghezza della parola) N
  - X numero di cui si vuole eseguire la conversione
  - $X_T$  rappresentazione di X in T
- Risulta

$$X_T = X + 2^{N-1}$$

A.S.E.

4.24

## Esempio

- **Disponendo di 8 digit in base 2**
  - Stabilire il max e min rappresentabile
  - Convertire in T i numeri 1111 (15), 1110101 (117), -10111 (-23), -1011001 (-89)

$$-2^7 \leq X \leq 2^7 - 1 \quad \langle -128 \leq X \leq 127 \rangle$$

$$1111 \Rightarrow 10000000 + 1111 = 10001111$$

$$1110101 \Rightarrow 10000000 + 1110101 = 11110101$$

$$-10111 \Rightarrow 10000000 - 10111 = 01101001$$

$$-1011001 \Rightarrow 10000000 - 1011001 = 00100111$$

A.S.E.

4.25

## Traslazione(2)

- **Se si dispone di “n” bit**

$$w = d_{n-1}d_{n-2} \cdots d_0$$

- **Il corrispondente in base 10 è**

$$w_{10} = (d_{n-1}2^{n-1} + d_{n-2}2^{n-2} + \cdots + d_02^0) - 2^{n-1}$$

- **Il range dei numeri risulta**

$$-2^{n-1} \leq w_{10} \leq 2^{n-1} - 1$$

- **Esempio n = 4**

$$0101 = 5 - 8 = -3$$

$$1110 = 14 - 8 = 6$$

A.S.E.

4.26

## Trasformazione da numeri positivi a numeri negativi e viceversa

- **Per la rappresentazione in modulo e segno**
  - Basta cambiare il bit di segno

$$N = 5 = 00101 \quad -N = -5 = 10101$$

- **Per la rappresentazione in complemento a 1**
  - Si complementano tutti i bit

$$N = 5 = 00101 \quad -N = -5 = 11010$$

- **Per la rappresentazione in complemento a 2**
  - Si complementano tutti i bit e si somma 1

$$N = 5 = 00101 \quad -N = -5 = 11010 + 1 = 11011$$

- **Per la rappresentazione in tralazione**
  - Si somma sempre  $2^{n-1}$

$$N = 5 = 16 + 5 = 10101 \quad -N = -5 = 16 - 5 = 01011$$

A.S.E.

4.27

## Tabella Riassuntiva

- **Con riferimento a una word di “n” bit, si ha:**

TIPO	VALORE	DINAMICA
M.S.	$w_{10} = (-1)^{d_{n-1}} (d_{n-2} 2^{n-2} + d_{n-3} 2^{n-3} + \dots d_0 2^0)$	$1 - 2^{n-1} \leq w_{10} \leq 2^{n-1} - 1$
C.1	$w_{10} = (1 - 2^{n-1}) \times d_{n-1} + (d_{n-2} 2^{n-2} + d_{n-3} 2^{n-3} + \dots d_0 2^0)$	$1 - 2^{n-1} \leq w_{10} \leq 2^{n-1} - 1$
C.2	$w_{10} = (-2^{n-1}) \times d_{n-1} + (d_{n-2} 2^{n-2} + d_{n-3} 2^{n-3} + \dots d_0 2^0)$	$-2^{n-1} \leq w_{10} \leq 2^{n-1} - 1$
TR.	$w_{10} = (-2^{n-1}) + (d_{n-1} 2^{n-1} + d_{n-2} 2^{n-2} + \dots d_0 2^0)$	$-2^{n-1} \leq w_{10} \leq 2^{n-1} - 1$

- **K =  $2^n$**
- **H =  $2^{n-1}$**
- **W numero in base 2 da convertire**
- **W' numero convertito**

$$K = 2^N \quad H = 2^{(N-1)}$$

TIPO	W > 0	W < 0
M.S.	$W' = W$	$W' = H +  W $
C.1	$W' = W$	$W' = K - 1 + W$
C.2	$W' = W$	$W' = K + W$
TR.	$W' = H + W$	$W' = H + W$

A.S.E.

4.28

## Varie rappresentazioni su 4 bit

Base 10	Mod e seg	comp a 1	comp a 2	trasl.
7	0.111	0.111	0.111	1.111
6	0.110	0.110	0.110	1.110
5	0.101	0.101	0.101	1.101
4	0.100	0.100	0.100	1.100
3	0.011	0.011	0.011	1.011
2	0.010	0.010	0.010	1.010
1	0.001	0.001	0.001	1.001
0	0.000	0.000	0.000	1.000
0	1.000	1.111	0.000	1.000
-1	1.001	1.110	1.111	0.111
-2	1.010	1.101	1.110	0.110
-3	1.011	1.100	1.101	0.101
-4	1.100	1.011	1.100	0.100
-5	1.101	1.010	1.011	0.011
-6	1.110	1.001	1.010	0.010
-7	1.111	1.000	1.001	0.001
-8	-	-	1.000	0.000

A.S.E.

4.29

## Addizione in Modulo e segno

- **Somma  $[1-2^{n-1} < (X+Y) < 2^{n-1}-1]$**

$$K = 2^N \quad H = 2^{(N-1)}$$

Addendi	Somma	Somma M. S.	Correzione
$X > 0$ $Y > 0$	$Z = X + Y$	$Z' = X + Y$	OK
$X > 0$ $Y < 0$	$Z = X -  Y $	$Z' = X +  Y  + H$	no *
$X < 0$ $Y > 0$	$Z = - X  + Y$	$Z' =  X  + Y + H$	no *
$X < 0$ $Y < 0$	$Z = - X  -  Y $	$Z' =  X  +  Y  + 2H$	no *

TIPO	$W > 0$	$W < 0$
M.S.	$W' = W$	$W' = H +  W $
C.1	$W' = W$	$W' = K - 1 + W$
C.2	$W' = W$	$W' = K + W$
TR.	$W' = H + W$	$W' = H + W$

- \* è necessario fare un test sul segno prima di eseguire la somma

A.S.E.

4.30

## Addizione in Complemento a 2

- Somma  $[-2^{n-1} < (X+Y) < 2^{n-1}-1]$

$$K = 2^N \quad H = 2^{(N-1)}$$

Addendi	Somma	Somma C. 2	Correzione
$X > 0$ $Y > 0$	$Z = X + Y$	$Z' = X + Y$	$Z = Z'$
$X > 0$ $Y < 0$	$Z = X -  Y $	$Z' = X -  Y  + K$	$Z = Z' \quad *$ $X >  Y $
$X < 0$ $Y > 0$	$Z = - X  + Y$	$Z' = - X  + Y + K$	$Z = Z' \quad **$ $Y >  X $
$X < 0$ $Y < 0$	$Z = - X  -  Y $	$Z' = - X  -  Y  + 2K$	***

TIPO	$W > 0$	$W < 0$
M.S.	$W' = W$	$W' = H +  W $
C.1	$W' = W$	$W' = K - 1 + W$
C.2	$W' = W$	$W' = K + W$
TR.	$W' = H + W$	$W' = H + W$

- Osservare che K non è possibile rappresentarlo su n bit
- \* Per  $X < |Y|$  il risultato è rappresentato in C. 2
- \*\* Per  $Y < |X|$  il risultato è rappresentato in C. 2
- \*\*\* Il risultato è rappresentato in C. 2

A.S.E.

4.31

## Esempi

- Parola di 4 bit

- $3 + 4 = 7$

0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1

- $5 + (-3) = 2$

0	1	0	1
1	1	0	1
1	0	0	1

- $(-5) + 3 = (-2)$

1	0	1	1
0	0	1	1
1	1	1	0

- $(-4) + (-3) = -7$

1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	0	0

- $6 + 5 = 11$

0	1	1	0
0	1	0	1
1	0	1	1

- $(-6) + (-5) = (-11)$

1	0	1	0
1	0	1	1
1	0	1	0

A.S.E.

4.32



## Osservazioni

- Se la word si estende “K” bit si ha
  - per numeri positivi si aggiungono in testa K zeri
  - per numeri negativi si aggiungono in testa K uno
- Esempio

	Word di 4 bit	Word di 6 bit
3	0.011	0.00011
4	0.100	0.00100
7	0.111	0.00111
-3	1.101	1.11101
-4	1.100	1.11100
-7	1.001	1.11001

A.S.E.

4.33

## Overflow

- Parola di 4 bit

- $3 + 4 = 7$

0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1

- $5 + (-3) = 2$

1	1	0	1
0	1	0	1
1	1	0	1
1	0	0	1

- $(-5) + 3 = (-2)$

0	0	1	1
1	0	1	1
0	0	1	1
1	1	1	0

- $(-4) + (-3) = -7$

1	1	0	0
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	0	1

- $6 + 5 = 11$

0	1	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
1	0	1	1

- $(-6) + (-5) = (-11)$

1	0	1	0
1	0	1	0
1	0	1	1
1	0	1	1

$$Ov = c_n \oplus c_{n+1}$$

A.S.E.

4.34

## Addizione in Complemento a 1

### • Somma $[1-2^{n-1} < (X+Y) < 2^{n-1}-1]$

Addendi	Somma	Somma C.1	Correzione
$X > 0$ $Y > 0$	$Z = X + Y$	$Z' = X + Y$	–
$X > 0$ $Y < 0$	$Z = X -  Y $	$Z' = X -  Y  - 1 + K$	$Z = Z' + 1^*$
$X < 0$ $Y > 0$	$Z = - X  + Y$	$Z' = - X  + Y - 1 + K$	$Z = Z' + 1^*$
$X < 0$ $Y < 0$	$Z = - X  -  Y $	$Z' = - X  -  Y  - 2 + 2K$	$Z = Z' + 2^{**}$

$$K = 2^N \quad H = 2^{(N-1)}$$

TIPO	$W > 0$	$W < 0$
M.S.	$W' = W$	$W' = H +  W $
C.1	$W' = W$	$W' = K - 1 + W$
C.2	$W' = W$	$W' = K + W$
TR.	$W' = H + W$	$W' = H + W$

- Osservare che K non è possibile rappresentarlo su n bit
- \* è necessario un test sul bit di segno, ma la correzione è facile
- \* se il risultato è negativo è già rappresentato in C. 1
- \*\* è necessario aggiungere 1 per ottenere il risultato in C. 1

A.S.E.

4.35

## Esempi

### • Parola di 4 bit

•  $3 + 4 = 7$

$$\begin{array}{r|rrrr} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$5 + (-3) = 2$

$$\begin{array}{r|rrrr} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$(-5) + 3 = (-2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

•  $(-4) + (-3) = -7$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$6 + 5 = 11$

$$\begin{array}{r|rrrr} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$(-6) + (-5) = (-11)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

A.S.E.

4.36

## **Conclusioni**

- **Rappresentazione di numeri con segno**
  - Modulo e segno
  - Complemento a 2
  - Complemento a 1
  - Traslazione
- **Operazioni con iteri relativi**

A.S.E.

4.37