

ARCHITETTURA DEI SISTEMI ELETTRONICI

LEZIONE N° 6

- **Algebra Booleana**
 - Insieme di elementi
 - insieme di operazioni
 - insieme di postulati
 - TEOREMI
- **Tabella di verità**

A.S.E.

6.1

Algebra della Logica

- **Gerge Boole**
 - **Matematico inglese** (1815 – 1864)
- ***“A Investigation of the Laws of Thought”* (1854)**
- **Algebra della Logica, Algebra di Boole, Algebra Booleana**
- **Sistematizzazione dovuta a HUNTINGTON (50 anni dopo)**
- **Applicazione all'ingegneria: SHANNON (1938)**
- **Sistema matematico formale che descrive funzioni logiche**
- **Sistema matematico formale**
 - **Insieme di elementi**
 - **insieme di operazioni**
 - **insieme di postulati**
 - » **TEOREMI**

A.S.E.

6.2

Postulati

- **Requisiti di un set di postulati**
- **Consistenza**
 - Un postulato non deve contraddire un altro
- **Indipendenza**
 - Un postulato non deve essere conseguenza di un altro
- **Minimo numero**
 - Insieme indispensabile

A.S.E.

6.3

Postulati di HUNTINGTON

- **Esistono un insieme di elementi "B", almeno due operatori binari (cioè che operano su due elementi) (+) e (\bullet), un segno di uguaglianza (=) che indica l'equivalenza di due espressioni e le parentesi per indicare l'ordine delle operazioni**
- **ALGEBRA BOOLEANA se e solo se contiene i seguenti postulati**

A.S.E.

6.4

Postulati di HUNTINGTON (P1)

- Gli operatori (+) e (•) sono chiusi
- a. Se x e y sono elementi di “B”, allora $x + y$ è un elemento di “B”. L’operazione eseguita da (+) prende il nome di **SOMMA LOGICA**.
- b. Se x e y sono elementi di “B”, allora $x \bullet y$ è un elemento di “B”. L’operazione eseguita da (•) prende il nome di **PRODOTTO LOGICO**.

A.S.E.

6.5

Postulati di HUNTINGTON (P2)

ELEMENTI IDENTITÀ

- Sia x un elemento di “B”
- a. Esiste in “B” un elemento “0”, chiamato **ELEMENTO IDENTITÀ rispetto a (+)** tale che risulti $x + 0 = x$.
- b. Esiste in “B” un elemento “1”, chiamato **ELEMENTO IDENTITÀ rispetto a (•)** tale che risulti $x \bullet 1 = x$.

A.S.E.

6.6

Postulati di HUNTINGTON (P3)

Proprietà COMMUTATIVA

- a. Esiste la proprietà commutativa rispetto alla somma logica: $x + y = y + x$**
- b. Esiste la proprietà commutativa rispetto al prodotto logico: $x \cdot y = y \cdot x$**

A.S.E.

6.7

Postulati di HUNTINGTON (P4)

Proprietà DISTRIBUTIVA

- a. La somma logica è distributiva rispetto al prodotto: $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$**
- b. Il prodotto logico è distributivo rispetto all'addizione: $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$**

A.S.E.

6.8

Postulati di HUNTINGTON (P5)

COMPLEMENTAZIONE

- Se x è un elemento di "B", allora esiste un altro elemento \bar{x} , detto **COMPLEMENTO** di x , che soddisfa le proprietà:
 - a. $x + \bar{x} = 1$
 - b. $x \cdot \bar{x} = 0$
- \bar{x} realizza l'operazione di complemento di x

A.S.E.

6.9

Postulati di HUNTINGTON (P*)

OSSERVAZIONE

- Gli elementi dell'insieme "B" sono al minimo 2

A.S.E.

6.10

Riassunto

• POSTULATI

Almeno due elementi distinti

1a	Somma logica (+)	1b	Prodotto logico (•)
2a	$x + 0 = x$	2b	$x \cdot 1 = x$
3a	$x + y = y + x$	3b	$x \cdot y = y \cdot x$
4a	$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$	4b	$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
5a	$x + \bar{x} = 1$	5b	$x \cdot \bar{x} = 0$

A.S.E.

6.11

Osservazioni

- **Alcune proprietà dell'algebra booleana sono vere anche nell'algebra normalmente usata:**
 - Proprietà commutativa
 - Proprietà distributiva del prodotto logico
- **Altre proprietà non sono vere :**
 - Proprietà distributiva della somma logica
- **L'operazione complemento logico esiste solo nell'algebra booleana**
- **La sottrazione e la divisione non esistono nell'algebra booleana**

A.S.E.

6.12

Principio di DUALITÀ

- **Da un'osservazione dei postulati precedenti si osserva che quelli “b” si ottengono da “a”**
 - **Scambiando i due operatori binari fra loro, (+) con (\bullet) e (\bullet) con (+)**
 - **Scambiando fra loro i due elementi identità, 1 con 0 e 0 con 1**

A.S.E.

6.13

TEOREMI FONDAMENTALI

- **Tecniche di dimostrazione dei teoremi**
 - **Impiego dei postulati fondamentali**
 - **Uso di teoremi precedentemente dimostrati**
 - **Dimostrazione per assurdo**
 - **(si ipotizza verificata l'ipotesi opposta a quella desiderata e si conclude che non è possibile che sia vera)**
 - **Dimostrazione per induzione**
 - **(se una ipotesi è vera per k variabili e per k+1 variabili allora è vera per qualunque n)**

A.S.E.

6.14

$$x + \bar{x}_1 = 1$$

Teorema 1 (i)

- L'elemento \bar{x} è univocamente determinato da x .
- **Dimostrazione per assurdo**
- Se per un elemento x ci siano due elementi \bar{x}_1 e \bar{x}_2 che soddisfano il postulato P5, allora risulta:

$x + 0 = x$	2a
$x \cdot 1 = x$	2b
$x + y = y + x$	3a
$x \cdot y = y \cdot x$	3b
$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$	4a
$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$	4b
$x + \bar{x} = 1$	5a
$x \cdot \bar{x} = 0$	5b

$$x + \bar{x}_1 = 1,$$

$$x \cdot \bar{x}_1 = 0,$$

$$x + \bar{x}_2 = 1,$$

$$x \cdot \bar{x}_2 = 0$$

A.S.E.

6.15

Teorema 1 (ii)

- **Quindi**

$x + 0 = x$	2a
$x \cdot 1 = x$	2b
$x + y = y + x$	3a
$x \cdot y = y \cdot x$	3b
$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$	4a
$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$	4b
$x + \bar{x} = 1$	5a
$x \cdot \bar{x} = 0$	5b

$$x + \bar{x}_1 = 1,$$

$$x \cdot \bar{x}_1 = 0,$$

$$x + \bar{x}_2 = 1,$$

$$x \cdot \bar{x}_2 = 0$$

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_1 \cdot 1 \quad \text{in base al P(2)(b)}$$

$$= \bar{x}_1 \cdot (x + \bar{x}_2) \quad \text{per sostituzione}$$

$$= \bar{x}_1 \cdot x + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \quad \text{in base al P(4)(b)}$$

$$= x \cdot \bar{x}_1 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \quad \text{in base al P(3)(b)}$$

$$= 0 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \quad \text{per sostituzione}$$

$$= x \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \quad \text{per sostituzione}$$

$$= \bar{x}_2 \cdot x + \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_1 \quad \text{in base al P(3)(b)}$$

$$= \bar{x}_2 \cdot (x + \bar{x}_1) \quad \text{in base al P(4)(b)}$$

$$= x \cdot 1 \quad \text{per sostituzione}$$

$$= \bar{x}_2 \quad \text{in base al P(2)(b)}$$

A.S.E.

6.16

Teorema 1 (iii)

- Quindi entrambi gli elementi che sono il complemento di x sono uguali, ciò implica che \bar{x} è univocamente determinato da x .
- Poiché \bar{x} è univocamente determinato da x , allora il simbolo $(\bar{})$ è un *operatore unitario* che assegna ad un elemento x dell'insieme B l'elemento \bar{x} sempre appartenente a B .

A.S.E.

6.17

Teorema 2

• **2a**

$$x + 1 = 1$$

• **Dimostrazione**

$$\begin{aligned}
 x + 1 &= (x + 1) \cdot 1 & 2b \\
 &= (x + \underline{x}) \cdot (x + 1) & 5a \\
 &= x + (\underline{x} \cdot 1) & 4a \\
 &= x + x & 2b \\
 &= 1 & 5a
 \end{aligned}$$

• **2b**

$$x \cdot 0 = 0$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned}
 x \cdot 0 &= (x \cdot 0) + 0 & 2a \\
 &= (x \cdot \underline{x}) + (x \cdot 0) & 5b \\
 &= x \cdot (\underline{x} + 0) & 4b \\
 &= x \cdot x & 2a \\
 &= 0 & 5b
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
 x + 0 = x & 2a \\
 x \cdot 1 = x & 2b \\
 x + y = y + x & 3a \\
 x \cdot y = y \cdot x & 3b \\
 x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z) & 4a \\
 x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) & 4b \\
 x + \bar{x} = 1 & 5a \\
 x \cdot \bar{x} = 0 & 5b
 \end{array}$$

A.S.E.

6.18

Teorema 3

• 3a

$$\overline{0} = 1$$

• Dimostrazione

• - - - - -

3b

$$\overline{1} = 0$$

Dimostrazione

- - - - -

A.S.E.

6.19

Teorema 4

(Idempotenza)

• 4a

$$x + x = x$$

• Dimostrazione

$$\begin{aligned} x + x &= (x + x) \cdot 1 \\ &= (x + x) \cdot (x + \overline{x}) \\ &= x + x \cdot x \\ &= x + 0 \\ &= x \end{aligned}$$

2b

5a

4a

5b

2a

4b

$$x \cdot x = x$$

Dimostrazione

per dualità

$$x + 0 = x$$

$$x \cdot 1 = x$$

$$x + y = y + x$$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$$

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

$$x + \overline{x} = 1$$

$$x \cdot x = x$$

2a

2b

3a

3b

4a

4b

5a

5b

A.S.E.

6.20

Teorema 5

(Involuzione)

$$\overline{(\overline{x})} = x$$

Il complemento del complemento è l'elemento stesso

Dimostrazione

.....

A.S.E.

6.21

Teorema 6

(assorbimento)

$$\begin{array}{ll} x + 0 = x & 2a \\ x \cdot 1 = x & 2b \\ x + y = y + x & 3a \\ x \cdot y = y \cdot x & 3b \\ x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z) & 4a \\ x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) & 4b \\ x + \overline{x} = 1 & 5a \\ x \cdot \overline{x} = 0 & 5b \end{array}$$

• **6a**

$$x + x \cdot y = x$$

• **Dimostrazione**

$$\begin{array}{ll} x + x \cdot y = x \cdot 1 + x \cdot y & 2b \\ = x \cdot (1 + y) & 4b \\ = x \cdot (y + 1) & 3a \\ = x \cdot 1 & T2a \\ = x & 2b \end{array}$$

6b

$$x \cdot (x + y) = x$$

Dimostrazione

per dualità

A.S.E.

6.22

Teorema 7 (semplificazione)

$$\begin{array}{ll} x+0=x & 2a \\ x \cdot 1=x & 2b \\ x+y=y+x & 3a \\ x \cdot y=y \cdot x & 3b \\ x+(y \cdot z)=(x+y) \cdot (x+z) & 4a \\ x \cdot (y+z)=(x \cdot y)+(x \cdot z) & 4b \\ x+\bar{x}=1 & 5a \\ x \cdot \bar{x}=0 & 5b \end{array}$$

- **7a**
 $x + \bar{x} \cdot y = x + y$
- **Dimostrazione**
- **per dualità**

7b
 $x \cdot (\bar{x} + y) = x \cdot y$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} x \cdot (\bar{x} + y) &= x \cdot \bar{x} + x \cdot y & 4b \\ &= 0 + x \cdot y & 5b \\ &= x \cdot y & 2a \end{aligned}$$

A.S.E.

6.23

Teorema 8

(Legge Associativa)

- **8a**
$$x + (y + z) = (x + y) + z = x + y + z$$

- **8b**
$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot y \cdot z$$

A.S.E.

6.24

Teorema 8*

(Consenso)

• **8*a** $xy + \bar{x}z + yz = xy + \bar{x}z$

• **Dimostrazione**

$$\begin{aligned} xy + \bar{x}z + yz &= xy + \bar{x}z + yz(x + \bar{x}) & 2b + 5a \\ &= xy + \bar{x}z + yzx + yz\bar{x} & 4b \\ &= (xy + xyz) + (\bar{x}z + \bar{x}zy) & T8a \\ &= xy + \bar{x}z & T6a \end{aligned}$$

• **8*b**

$$(x + y) \cdot (\bar{x} + z) \cdot (y + z) = (x + y) \cdot (\bar{x} + z)$$

A.S.E.

6.25

$$x + 0 = x$$

$$x \cdot 1 = x$$

$$x + y = y + x$$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$$

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

$$x + \bar{x} = 1$$

$$x \cdot x = x$$

2a

2b

3a

3b

4a

4b

5a

5b

Teorema 9

(Teorema di DE MORGAN)

• **9a**

$$\overline{(x + y)} = \bar{x} \cdot \bar{y}$$

9b

$$\overline{(x \cdot y)} = \bar{x} + \bar{y}$$

A.S.E.

6.26

Riassunto

• TEOREMI

$$2a \quad x + \bar{1} = 1$$

$$3a \quad \bar{0} = 1$$

$$4a \quad x + x = x$$

$$5 \quad \overline{(\bar{x})} = x$$

$$6a \quad x + \bar{x}y = x$$

$$7a \quad x + xy = x + y$$

$$8a \quad x + (y + z) = (x + y) + z = x + y + z$$

$$8a^* \quad xy + xz + yz = \bar{x}y + \bar{x}z$$

$$9a \quad \overline{(x + y)} = \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$2b \quad x \cdot \bar{0} = 0$$

$$3b \quad \bar{1} = 0$$

$$4b \quad x \cdot x = x$$

$$6b \quad x(x + y) = x$$

$$7b \quad x(x + y) = xy$$

$$8b \quad x(yz) = (xy)z = xyz$$

$$8b^* \quad (x + y)(\bar{x} + z)(y + z) = (x + y)(\bar{x} + z)$$

$$9b \quad \overline{(x \cdot y)} = \bar{x} + \bar{y}$$

A.S.E.

6.27

Richiami Postulati di HUNTINGTON

Almeno due elementi distinti

1a Somma logica (+)

1b Prodotto logico (•)

$$2a \quad x + 0 = x$$

$$2b \quad x \cdot 1 = x$$

$$3a \quad x + y = y + x$$

$$3b \quad x \cdot y = y \cdot x$$

$$4a \quad x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z) \quad 4b \quad x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

$$5a \quad x + \bar{x} = 1$$

$$5b \quad x \cdot \bar{x} = 0$$

A.S.E.

8.28

Definizione di “B”

- **Elementi** (2) [Algebra delle commutazioni]

- | | |
|------------------------|---------------------|
| • 0 (logico) | 1 (logico) |
| • Falso | Vero |
| • Livello logico Basso | Livello logico Alto |
| • 0 V | 5 V |

- **Costanti** Possono assumere due valori

- **Variabili** Possono assumere due valori

$$\begin{array}{lll} x = 0 & \text{se} & x \neq 1 \\ x = 1 & \text{se} & x \neq 0 \end{array}$$

$$\bar{0} = 1 \qquad \bar{1} = 0$$

A.S.E.

8.29

Definizione di “OR”

- **Operazione**

– OR o SOMMA LOGICA

- **definizione**

$$x + y$$

– l'operazione OR è definita dalla tabella

		y	
		0	1
x	0	0	1
	1	1	1

x	y	x+y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A.S.E.

8.30

Osservazioni

1. $x + y$ è uguale a "0" se e solo se x e y sono uguali a "0", altrimenti $x + y$ è uguale a "1"
2. Si può estendere a "n" variabili:
 $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ è uguale "0" se e solo se x_1, x_2, \dots, x_n sono uguali a "0"
- La funzione OR corrisponde al concetto:
 perché un evento si verifica è sufficiente che una sola condizioni sia verificata

A.S.E.

8.31

Definizione di "AND"

- Operazione
 - AND o PRODOTTO LOGICO
- Definizione $x \cdot y$ xy
 - l'operazione AND è definita dalla tabella

$x \cdot y$		y	
		0	1
x	0	0	0
	1	0	1

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A.S.E.

8.32

Osservazioni

1. $x \bullet y$ è uguale a “1” se e solo se x e y sono uguali a “1”, altrimenti $x \bullet y$ è uguale a “0”
2. Si può estendere a “n” variabili:
 $x_1 \bullet x_2 \bullet \dots \bullet x_n$ è uguale “1” se e solo se x_1, x_2, \dots, x_n sono uguali a “1”
- La funzione AND corrisponde al concetto:
un evento si verifica se e solo se tutte le condizioni sono verificate

A.S.E.

8.33

“NOT”

- **Operazione**
 - NOT o Complemento Logico , o Negazione, o Inversione

$$\overline{x}$$

- **Osservazione**
 - In base alla definizione iniziale si ha

x	\overline{x}
0	1
1	0

A.S.E.

8.34

Verifica P1

- Le funzioni AND e OR sono chiuse OK
 - Per qualunque valore degli ingressi le funzioni sono definite
 - I valori delle uscite appartengono a “B”

$x+y$

		y	
		0	1
x	0	0	1
	1	1	1

$x \cdot y$

		y	
		0	1
x	0	0	0
	1	0	1

A.S.E.

8.35

Verifica P2

- “0” elemento identità della funzione OR e “1” elemento identità della funzione AND
- $x+0=x$, $0+y=y$; $x \cdot 1=x$, $1 \cdot y=y$ OK
 - Nella OR per $x=0$ ($y=0$) le uscite coincidono con y (x)
 - Nella AND per $x=1$ ($y=1$) le uscite coincidono con y (x)

$x+y$

		y	
		0	1
x	0	0	1
	1	1	1

$x \cdot y$

		y	
		0	1
x	0	0	0
	1	0	1

A.S.E.

8.36

Verifica P3

- Le funzioni OR e AND sono commutative
- **OK**
 - Le tabelle sono simmetriche rispetto alla diagonale principale

$x+y$

		y	
		0	1
x	0	0	1
	1	1	1

$x \cdot y$

		y	
		0	1
x	0	0	0
	1	0	1

A.S.E.

8.37

Verifica P4

- Le funzioni OR e AND sono distributive
- $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$, $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ **OK**
- **Metodo dell'induzione perfetta**

x	y	z	yz	x+yz	x+y	x+z	(x+y)(x+z)	y+z	x(y+z)	xy	xz	xy+xz
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

A.S.E.

8.38

Verifica P5

- Il complemento di x deve soddisfare le condizioni
- $x + \bar{x} = 1, \quad x \cdot \bar{x} = 0$ **OK**
- Metodo dell'induzione perfetta

x	\bar{x}	$x + \bar{x}$	$x \cdot \bar{x}$
0	1	1	0
1	0	1	0

A.S.E.

8.39

Funzione logica (o Booleana)

- Una funzione Booleana (completa)

$$u = f(x_1, \dots, x_n)$$

è una legge che fa corrispondere un valore logico (0 o 1) di u ad ogni combinazione di valori x_1, \dots, x_n .

- La funzione f è costituita da variabili logiche, **costanti** e le tre operazioni logiche fondamentali

$$u = \overline{(x_1 + x_2)} \cdot (x_3 + x_1 \cdot \overline{x_2}) + \overline{x_3}$$

A.S.E.

8.40

Osservazioni

- **Nelle funzioni logiche le parentesi indicano una gerarchia di esecuzione uguale a quella comunemente usata nelle espressioni aritmetiche note**
- **Fra le operazioni logiche AND, OR e NOT esiste la gerarchia: 1) NOT, 2) AND, 3) OR**
- **La gerarchia prima descritta consente di ridurre l'uso di parentesi nelle funzioni logiche**

A.S.E.

8.41

Tabella di Verità 1

- **Una funzione logica può sempre essere espressa da una tabella che prende il nome di: TABELLA DI VERITÀ (TRUTH TABLE)**
- **Osservazione**
- **Una funzione di “n” variabili ammette 2^n possibili configurazioni**
- **Una funzione di “n” variabili è completamente descritta da una tabella che ha sulla sinistra le 2^n possibili configurazioni degli ingressi e a destra i valori (0 o 1) a secondo del valore della funzione**

A.S.E.

8.42

Tabella di verità 2

- Funzione di tre variabili

$$u = f(x, y, z)$$

x	y	z	u
0	0	0	$f(0,0,0)$
0	0	1	$f(0,0,1)$
0	1	0	$f(0,1,0)$
0	1	1	$f(0,1,1)$
1	0	0	$f(1,0,0)$
1	0	1	$f(1,0,1)$
1	1	0	$f(1,1,0)$
1	1	1	$f(1,1,1)$

A.S.E.

8.43

Esempio

$$u = f(x, y, z) = (x + \bar{y}) \cdot (\bar{x} + z) + yz$$

$$f(0,1,1) = (0 + \bar{1}) \cdot (\bar{0} + 1) + 1 \cdot 1 = (0 + 0) \cdot (1 + 1) + 1 = 0 \cdot 1 + 1 = 0 + 1 = 1$$

x	y	z	\bar{x}	\bar{y}	$x + \bar{y}$	$\bar{x} + z$	$(x + \bar{y})(\bar{x} + z)$	yz	u
0	0	0	1	1	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1

A.S.E.

8.44

Passo 1

$$u = f(x, y, z) = (x + \bar{y})(\bar{x} + z) + yz$$

x	y	z	\bar{x}	\bar{y}	$x + \bar{y}$	$\bar{x} + z$	$(x + \bar{y})(\bar{x} + z)$	yz	u
0	0	0	1	1	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1

A.S.E.

8.45

Passo 2

$$u = f(x, y, z) = (x + \bar{y})(\bar{x} + z) + yz$$

x	y	z	\bar{x}	\bar{y}	$x + \bar{y}$	$\bar{x} + z$	$(x + \bar{y})(\bar{x} + z)$	yz	u
0	0	0	1	1	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1

A.S.E.

8.46

Passo 3

$$u = f(x, y, z) = (x + \bar{y})(\bar{x} + z) + yz$$

x	y	z	\bar{x}	\bar{y}	$x + \bar{y}$	$\bar{x} + z$	$(x + \bar{y})(\bar{x} + z)$	yz	u
0	0	0	1	1	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1

A.S.E.

8.47

Passo 4

$$u = f(x, y, z) = (x + \bar{y})(\bar{x} + z) + yz$$

x	y	z	\bar{x}	\bar{y}	$x + \bar{y}$	$\bar{x} + z$	$(x + \bar{y})(\bar{x} + z)$	yz	u
0	0	0	1	1	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1

A.S.E.

8.48

Passo 5

$$u = f(x, y, z) = (x + \bar{y})(\bar{x} + z) + yz$$

x	y	z	\bar{x}	\bar{y}	$x + \bar{y}$	$\bar{x} + z$	$(x + \bar{y})(\bar{x} + z)$	yz	u
0	0	0	1	1	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1

A.S.E.

8.49

Passo 6

$$u = f(x, y, z) = (x + \bar{y})(\bar{x} + z) + yz$$

x	y	z	\bar{x}	\bar{y}	$x + \bar{y}$	$\bar{x} + z$	$(x + \bar{y})(\bar{x} + z)$	yz	u
0	0	0	1	1	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1

A.S.E.

8.50

Fine

$$u = f(x, y, z) = (x + \bar{y})(\bar{x} + z) + yz$$

x	y	z	\bar{x}	\bar{y}	$x + \bar{y}$	$\bar{x} + z$	$(x + \bar{y})(\bar{x} + z)$	yz	u
0	0	0	1	1	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1

A.S.E.

8.51

Osservazione

- La tabella di verità consente di provare la veridicità di una relazione logica, poiché verifica se la relazione è vera per TUTTE le possibili combinazioni dei valori delle variabili
- Tale proprietà è stata utilizzata nel
- **Metodo dell'INDUZIONE PERFETTE**

A.S.E.

8.52

Teorema 9

(dimostrazione)

• 9a

$$\overline{(x + y)} = \bar{x} \cdot \bar{y}$$

x	y	$x+y$	$\overline{(x+y)}$	\bar{x}	\bar{y}	$\bar{x} \cdot \bar{y}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

9b

$$\overline{(x \cdot y)} = \bar{x} + \bar{y}$$

x	y	$x \cdot y$	$\overline{(x \cdot y)}$	\bar{x}	\bar{y}	$\bar{x} + \bar{y}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

A.S.E.

8.53

Conclusioni

- **Algebra BOLEANA**
 - Insieme di elementi
 - Variabili, costanti
 - Insieme di operazioni
 - Insieme di postulati
 - Teoremi fondamentali
- **Espressioni algebriche**
- **Tabella di verità**

A.S.E.

8.54