

# **ARCHITETTURA DEI SISTEMI ELETTRONICI**

## **LEZIONE N° 3**

- **Sistema numerico**
- **Base 2, 3, 4, 5, 8, 10, 12, 16**
- **Aritmetica binaria**
- **Conversione da base “N” a base 10**
- **Conversione da base 10 a base “N”**
- **Modulo**
- **Modulo “*M*”**

**A.S.E.**

**3.1**

## **Richiami**

- **Segnali analogici**
- **Segnali numerici**
- **Segnali digitali**
- **Conversione da segnale analogico a segnale numerico**
- **Conversione da segnale numerico a segnale analogico**
- **Codifica**

**A.S.E.**

**3.2**

## Riepilogo (1)

- **Segnale Analogico**
  - Un segnale analogico ha un'ampiezza che varia in maniera continua nel tempo
- **Segnale campionato**
  - Viene “congelato” il valore che il segnale analogico assume a intervalli regolari di tempo
- **Segnale numerico 1**
  - Viene assegnato al segnale campionato il valore numerico relativo all'intervallo di appartenenza

A.S.E.

3.3

## Riepilogo (2)

- **Segnale numerico 2**
  - Al segnale quantizzato si può associare il valore numerico “codificato”
- **Segnale Digitale**
  - Particolare segnale numerico che può assumere solo due valori “0” e “1”
    - Al valore “0” si associa, per esempio, 0 V
    - Al valore “1” si associa, per esempio, 5 V

A.S.E.

3.4

## Codifica

- Un valore numerico può essere codificato in un numero N di segnali digitali

Valore Numerico	A	B	C
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	1
3	0	1	0
4	1	1	0
5	1	1	1
6	1	0	1
7	1	0	0

A.S.E.

3.5

## Sistema Decimale

- Il sistema decimale è comunemente utilizzato nella nostra vita quotidiana
- Tipico numero decimale

872.64

- Esso significa

$$\begin{aligned}872.64 &= 800 + 70 + 2 + 0.6 + 0.04 \\&= 8 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 2 \cdot 1 + 6 \cdot 0.1 + 4 \cdot 0.01 \\&= 8 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}\end{aligned}$$

- Ciascun simbolo di questo numero rappresenta una quantità intera (8, 7, 2, 6, 4)

A.S.E.

3.6

## Notazione Posizionale

- Per rappresentare una quantità maggiore di quella associata a ciascun simbolo ( cifra, digit) si usano più digit per formare un numero
- La posizione relativa di ciascun digit all'interno del numero è associata ad un peso
- $N = 587 = 5 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 7 \times 10^0$

- Notazione posizionale

$$N = d_{n-1} d_{n-2} \dots d_1 d_0 . d_{-1} \dots d_m$$

- Rappresenta il polinomio

$$N = d_{n-1} \cdot b^{n-1} + d_{n-2} \cdot b^{n-2} + \dots + d_1 \cdot b^1 + d_0 \cdot b^0 + d_{-1} \cdot b^{-1} + \dots + d_{-m} \cdot b^{-m}$$

A.S.E.

3.7

## Sistema numerico non posizionale

- I numeri romani non danno luogo a un sistema numerico posizionale
- Lo stesso simbolo in posizioni diverse assume valori diversi, ma non pesi diversi in funzione della base
- Esempio
  - I; II; IV

A.S.E.

3.8

## Sistema Numerico

- **Base (radice)**
  - Numero di simboli diversi di un sistema numerico
- **Digit (Cifra)**
  - ciascun simbolo = DIGIT denota una quantità

Base	Sistema	Digit
2	binario	0, 1
3	ternario	0, 1, 2
4	quaternario	0, 1, 2, 3
5	quinario	0, 1, 2, 3, 4
8	ottale	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
10	decimale	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
12	duodecimale	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B
16	esadecimale	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

A.S.E.

3.9

## Rappresentazione completa

- Se si usano basi diverse, lo stesso numero rappresenta quantità diverse in funzione della base usata

- $287 = 287_{10}$  quindi indicare la base utilizzata

$287_{10}$ ,  $345_8$ ,  $45AD_{16}$ ,  $23_4$ ,  $1001011_2$

- $287_{12} \neq 287_{10}$

– binary digit = bit (letterale pezzettino)

A.S.E.

3.10

## Tabella

Decimale	Binario	Ternario	Ottale	Esadecimale
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	10	2	2	2
3	11	10	3	3
4	100	11	4	4
5	101	12	5	5
6	110	20	6	6
7	111	21	7	7
8	1000	22	10	8
9	1001	100	11	9
10	1010	101	12	A
11	1011	102	13	B
12	1100	110	14	C
13	1101	111	15	D
14	1110	112	16	E
15	1111	120	17	F
16	10000	121	20	10

A.S.E.

3.11

## Operazioni aritmetiche di base

- **Le quattro operazioni aritmetiche di base sono:**
  - Addizione
  - Sottrazione
  - Moltiplicazione
  - Divisione
- **Tali operazioni sono note in base decimale**
- **Si possono eseguire con la stessa tecnica in qualunque base**
- **Si considera ora il sistema binario e quello ternario**
  - **quello binario è di gran lunga il più importante**

A.S.E.

3.12

## Addizione

- **Addizione di due digit**
  - Può essere espressa i modo tabellare
- **Sistema binario**                      **Sistema ternario**

		b	
		0	1
a+b	a	0	1
	1	1	0 C=1

		a		
		0	1	2
a+b	b	0	1	2
	1	1	2	0 C=1
	2	2	0 C=1	1 C=1

A.S.E.

3.13

## Addizione binaria 1

- **Somma di due bit**
  - $x + y$
  - $s$  = Somma
  - $c$  = Carry (RIPORTO)

x	y	s	c
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

- **Esempio**

	carry	1	1	1		1	
addendo		1	0	1	1	0	0
addendo		1	1	1	0	1	0
somma		1	1	0	0	1	1

$$89 + 117 = 206$$

A.S.E.

3.14

## Addizione binaria 2

- In caso di numeri frazionari si deve allineare il punto *binario*

- **Esempio**

$$1011.011 + 110.1011 = 10010.0001$$

$$\begin{array}{r}
 \textcolor{red}{1} \text{ } \textcolor{red}{1} \text{ } \textcolor{red}{1} \text{ } \textcolor{red}{1} \text{ } \textcolor{red}{1} \text{ } \textcolor{red}{1} \text{ } \textcolor{red}{1} \\
 \hline
 \phantom{0}1 \phantom{0} \phantom{0}1 \phantom{0}1 \phantom{0}0 \phantom{0}1 \phantom{0}1 \\
 \phantom{00}1 \phantom{0}1 \phantom{0}0 \phantom{0}1 \phantom{0}0 \phantom{0}1 \phantom{0}1 \\
 \hline
 1 \phantom{0}0 \phantom{0}0 \phantom{0}1 \phantom{0}0 \phantom{0}0 \phantom{0}0 \phantom{0}1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 11.375 \text{ } + \\
 06.6875 = \\
 \hline
 18.0625
 \end{array}$$

**A.S.E.**

### 3.15

## Addizione ternaria 1

- **Somma di due digit**

- $x + y$
- $d = \text{Somma}$
- $c = \text{Carry (RIPORTO)}$

- **Esempio**       $1666 + 1420 = 3086$

<b>carry</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>			
<b>addendo</b>	<b>2</b>	<b>0</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>0</b>	<b>1</b>
<b>addendo</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>1</b>
<b>somma</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>2</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>2</b>

**A.S.E.**

### 3.16

x	y	s	c
0	0	0	0
0	1	1	0
0	2	2	0
1	0	1	0
1	1	2	0
1	2	0	1
2	0	2	0
2	1	0	1
2	2	1	1



## Addizione ternaria 2

- **In caso di numeri frazionari si deve allineare il punto *ternario***

- **Esempio**

**2012.012+120.1022 =2202.1212**

[illegible]

$$\begin{array}{r} 59.1851 + \\ 15.4320 = \\ \hline 73.6171 \end{array}$$

**A.S.E.**

### 3.17

## Sottrazione

- **Sottrazione di due digit**
  - Può essere espressa i modo tabellare

- **Sistema binario**

- ## Sistema ternario

		b	
		0	1
a	0	0	1
	1	1	0

a-b		b		
		0	1	2
a	0	0	2 B=1	1 B=1
	1	1	0	2 B=1
	2	2	1	0

**A.S.E.**

### 3.18

## Sottrazione binaria 1

- Sottrazione di due bit

- $x - y$
- D = Differenza
- B = Borrow (PRESTITO)

x	y	D	B
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0

- Esempio

		<b>Borrow</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>		<b>1</b>	
minuendo	1	1	0	0	1	1	1	0
sottraendo		1	1	1	0	1	0	1
differenza		1	0	1	1	0	0	1

206 - 117 = 89

A.S.E.

3.19

## Sottrazione binaria 2

- In caso di numeri frazionari si deve allineare il punto *binario*

- Esempio

$$10010.0001 - 1011.011 = 110.1011$$

	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	
	1	0	0	1	0.	0	0	0
		1	0	1	1.	0	1	1
			1	1	0.	1	0	1

$$\begin{array}{r} 18.0625 - \\ 11.375 = \\ \hline 06.6875 \end{array}$$

A.S.E.

3.20

## Sottrazione ternaria 1

- Sottrazione di due digit

- $x - y$
- D = Differenza
- B = Borrow (PRESTITO)

x	y	D	B
0	0	0	0
0	1	2	1
0	2	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	2	2	1
2	0	2	0
2	1	1	0
2	2	0	0

- Esempio  $3086 - 1420 = 1666$

	<b>Borrow</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	
minuendo	1	1	0	2	0	0	2
sottraendo		1	2	2	1	1	2
differenza		2	0	2	1	2	0
							1

A.S.E.

3.21

## Sottrazione ternaria 2

- In caso di numeri frazionari si deve allineare il punto *ternario*

- Esempio

$$2012.012 - 120.1022 = 2202.1212$$

	<b>1</b>				<b>1</b>	
2	2	0	2.	1	2	1
2	0	1	2.	0	1	2
	1	2	0.	1	0	2
						2

$$\begin{array}{r} 73.6171 - \\ 59.1851 = \\ 15.4320 \end{array}$$

A.S.E.

3.22

## Moltiplicazione

- **Moltiplicazione di due digit**
  - Può essere espressa i modo tabellare
- **Sistema binario**                      **Sistema ternario**

$a \times b$		$b$	
		0	1
$a$	0	0	0
	1	0	1

$a \times b$		$b$		
		0	1	2
$a$	0	0	0	0
	1	0	1	2
	2	0	2	1
				C=1

A.S.E.

3.23

## Moltiplicazione binaria

- **Prodotto di due bit**

- $X \times Y$
- $P = \text{Prodotto}$

- **Esempio**

moltiplicando		1	0.	1	1		
moltiplicatore			1	0	1		
Prodotti parziali	{		1	0.	1	1	
			0	0	0.	0	
			1	0	1	1	
prodotto		1	1	0	1.	1	1

$x$	$y$	$P$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$2.75 \times 5 = 13.75$$

A.S.E.

3.24

## Moltiplicazione ternaria

- **Prodotto di due digit**

- $X \times Y$
- $P = \text{Prodotto}$
- $C = \text{Carry}$

- **Esempio**

moltiplicando	2	1	0	2	
moltiplicatore		1	0	2	
	<hr/>				
Prodotti parziali	1	1	2	1	1
	0	0	0	0	
	<hr/>				
prodotto	2	1	0	2	
	<hr/>				
	2	2	2	1	1

A.S.E.

x	y	P	C
0	0	0	0
0	1	0	0
0	2	0	0
1	0	0	0
1	1	1	0
1	2	2	0
2	0	0	0
2	1	2	0
2	2	1	1

$65 \times 11 = 715$

3.25

## Divisione binaria

- **Operazione divisione si effettua con moltiplicazioni e sottrazioni multiple**
- **Esempio binario**

dividendo	1	0	1	0	0.	1	divisore	1	1
	-	1	1				quoziente	1	1
		1	0	0					
		-	1	1					
			0	1	0				
			-	0	0				
				1	0	1			
				-	1	1			
					1	0			resto

A.S.E.

3.26

## Divisione Ternaria

- **Esempio**

$$\begin{array}{r}
 \text{dividendo} \quad \overline{2 \ 0 \ 1 \ 0} \quad \text{divisore} \quad \overline{1 \ 2} \\
 \underline{-1 \ 2} \qquad \qquad \underline{1 \ 0 \ 2} \\
 1 \ 1 \qquad \qquad \qquad \text{quoziente} \\
 \underline{0 \ 0} \\
 1 \ 1 \ 0 \\
 \underline{1 \ 0 \ 1} \quad \text{resto} \\
 2
 \end{array}$$

**A.S.E.**

### 3.27

## Conversione di base

- Un numero è un simbolo che rappresenta una quantità
- Una quantità che può essere espressa in una base, può essere espressa in qualunque altra base
- Un intero espresso in base " $b_1$ " è un intero anche in base " $b_2$ "
- Un numero frazionario espresso in base " $b_1$ " è un numero frazionario anche in base " $b_2$ "
- Esistono due tecniche di conversione da una base ad un'altra
  - Metodo polinomiale (le operazioni si fanno nella base d'arrivo)
  - Metodo iterativo (le operazioni si fanno nella base di partenza)

**A.S.E.**

**3.28**

## Metodo polinomiale

- Il numero “***N***” espresso in base “***b1***” ha la forma:

$$N_{(b1)} = d_{n-1(b1)} + d_{n-2(b1)} + \dots + d_{1(b1)} + d_{0(b1)} \cdot d_{-1(b1)} + \dots + d_{-m(b1)}$$

$$= d_{n-1(b1)} \cdot b_{1(b1)}^{n-1} + \dots + d_{0(b1)} \cdot b_{1(b1)}^0 \cdot d_{-1(b1)} \cdot b_{1(b1)}^{-1} + \dots + d_{-m(b1)} \cdot b_{1(b1)}^{-m}$$

- In base “**10**” si ha:

$$N_{(b1)} = d_{n-1(b1)} \cdot 10_{(b1)}^{n-1} + \dots + d_{0(b1)} \cdot 10_{(b1)}^0 \cdot d_{-1(b1)} \cdot 10_{(b1)}^{-1} + \dots + d_{-m(b1)} \cdot 10_{(b1)}^{-m}$$

- In base “***b2***” il numero “***N***” risulta:

$$N_{(b2)} = d_{n-1(b2)} \cdot b_{1(b2)}^{n-1} + \dots + d_{0(b2)} \cdot b_{1(b2)}^0 \cdot d_{-1(b2)} \cdot b_{1(b2)}^{-1} + \dots + d_{-m(b2)} \cdot b_{1(b2)}^{-m}$$

- Secondo quest’ultima equazione è possibile convertire

$$N_{(b1)} = N_{(b2)}$$

A.S.E.

3.29

## Esempio 1

- Convertire 1101 in base 2 nell’equivalente in base 10

$$1101_{(2)} = 1_{(2)} \times 10_{(2)}^3 + 1_{(2)} \times 10_{(2)}^2 + 0_{(2)} \times 10_{(2)}^1 + 1_{(2)} \times 10_{(2)}^0$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$= 1_{(10)} \times 2_{(10)}^3 + 1_{(10)} \times 2_{(10)}^2 + 0_{(10)} \times 2_{(10)}^1 + 1_{(10)} \times 2_{(10)}^0$$

$$= 8 + 4 + 0 + 1$$

$$= 13_{(10)}$$

A.S.E.

3.30

## Esempio 2

- **Convertire il numero binario 101.011 nell'equivalente in base 10**

$$\begin{aligned}101.011_{(2)} &= 1_{(2)} \times 10_{(2)}^2 + 0_{(2)} \times 10_{(2)}^1 + 1_{(2)} \times 10_{(2)}^0 + 0_{(2)} \times 10_{(2)}^{-1} + 1_{(2)} \times 10_{(2)}^{-2} + 1_{(2)} \times 10_{(2)}^{-3} \\&= 1_{(10)} \times 2_{(10)}^2 + 0_{(10)} \times 2_{(10)}^1 + 1_{(10)} \times 2_{(10)}^0 + 0_{(10)} \times 2_{(10)}^{-1} + 1_{(10)} \times 2_{(10)}^{-2} + 1_{(10)} \times 2_{(10)}^{-3} \\&= 4 + 0 + 1 + 0.25 + 0.125 = 5.375_{(10)}\end{aligned}$$

- **Convertire il numero ternario 201.1 nell'equivalente in base 10**

$$\begin{aligned}201.1_{(3)} &= 2_{(3)} \times 10_{(3)}^2 + 0_{(3)} \times 10_{(3)}^1 + 1_{(3)} \times 10_{(3)}^0 + 1_{(3)} \times 10_{(3)}^{-1} \\&= 2_{(10)} \times 3_{(10)}^2 + 0_{(10)} \times 3_{(10)}^1 + 1_{(10)} \times 3_{(10)}^0 + 1_{(10)} \times 3_{(10)}^{-1} \\&= 18 + 0 + 1 + 0.3333... = 19.333..._{(10)}\end{aligned}$$

A.S.E.

3.31

## Esempio 3

- **Convertire il numero esadecimale D3F nell'equivalente in base 10**

$$\begin{aligned}D3F_{(16)} &= D_{(16)} \times 10_{(16)}^2 + 3_{(16)} \times 10_{(16)}^1 + F_{(16)} \times 10_{(16)}^0 \\&= 13_{(10)} \times 16_{(10)}^2 + 3_{(10)} \times 16_{(10)}^1 + 15_{(10)} \times 16_{(10)}^0 \\&= 13 \times 256 + 3 \times 16 + 15 = 3391_{(10)}\end{aligned}$$

- **OSSERVAZIONE**
- **Il metodo polinomiale è conveniente per la conversione da base “b” a base 10**

A.S.E.

3.32



## Metodo iterativo (numeri interi)

- **Tecnica delle divisioni successive**

- Perché dividendo un numero per la sua base, il resto è l'ultimo digit

$$N = d_{n-1}b^{n-1} + d_{n-2}b^{n-2} + \dots + d_1b^1 + d_0b^0$$

$$N_1 = \frac{N}{b} = d_{n-1}b^{n-2} + d_{n-2}b^{n-3} + \dots + d_1b^0$$

$$\text{resto di } \left( \frac{N}{b} \right) = d_0$$

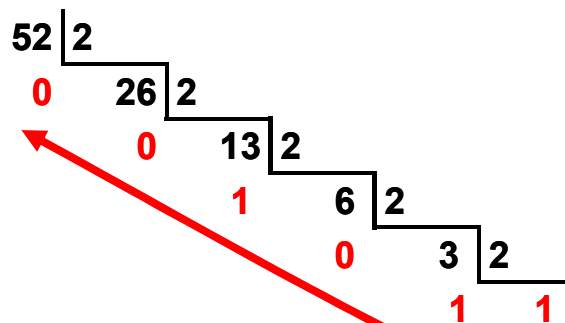
$$N = N_1b + d_0$$

A.S.E.

3.33

## Esempio 1

- Convertire il numero 52 in base 10 nell'equivalente in base 2



- Quindi

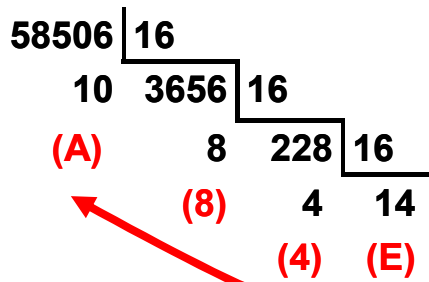
$$52_{10} = 110100_2$$

A.S.E.

3.34

## Esempio 2

- Convertire il numero 58506 in base 10 nell'equivalente in base 16



- Quindi

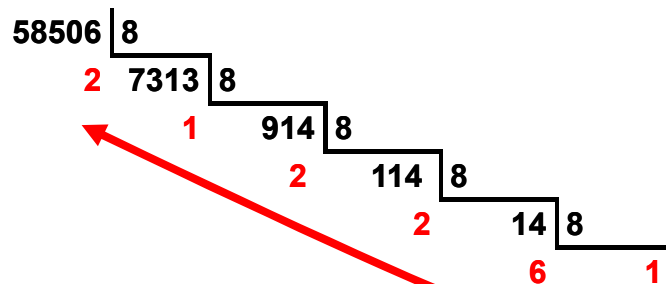
$$58506_{10} = E48A_{16}$$

A.S.E.

3.35

## Esempio 3

- Convertire il numero 58506 in base 10 nell'equivalente in base 8



- Quindi

$$58506_{10} = 162212_8$$

A.S.E.

3.36

## Osservazione

- Il metodo iterativo è particolarmente conveniente per la conversione da base 10 a base "b"

A.S.E.

3.37

## Metodo polinomiale [richiamo] (numeri frazionari)

- Conversione da base "b" a base 10
  - Non presenta problemi

$$N = d_{n-1}b^{n-1} + \dots + d_0b^0 + d_{-1}b^{-1} + \dots + d_{-m}b^{-m}$$

- Esempio
- Convertire il numero binario 1101.101

$$\begin{aligned} 1101.101 &= 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} = \\ &= 1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 + 1 \times 0.5 + 0 \times 0.25 + 1 \times 0.125 = \\ &= 8 + 4 + 1 + 0.5 + 0.125 = 13.625 \end{aligned}$$

A.S.E.

3.38

## Metodo iterativo (numeri frazionari)

- **Conversione da base 10 a base “b”**

- La parte intera procedimento prima visto
- Per la parte frazionaria in base *b* si ha

$$N_F = d_{-1}b^{-1} + d_{-2}b^{-2} + \dots + d_{-m}b^{-m}$$

- Moltiplicando per la base si ha

$$N_F \times b = d_{-1} + d_{-2}b^{-1} + \dots + d_{-m}b^{-m+1} = d_{-1} + N'_F$$

$$N'_F \times b = d_{-2} + d_{-3}b^{-1} + \dots + d_{-m}b^{-m+2} = d_{-2} + N''_F$$

- La conversione può non avere fine, si arresta una volta raggiunta la precisione desiderata

A.S.E.

3.39

## Esempio

- **Conversione da base 10 a base 16**

$$N_F = 0.8435_{10}$$

$$16 \times 0.8435 = 13.496 \quad d_{-1} = D$$

$$16 \times 0.496 = 7.936 \quad d_{-2} = 7$$

$$16 \times 0.936 = 14.976 \quad d_{-3} = E$$

$$16 \times 0.976 = 15.616 \quad d_{-4} = F$$

$$N_F = 0.D7EF_{16}$$

A.S.E.

3.40

## ERRORE

- **Avendo arrestato la conversione al quarto passaggio si commette un certo errore**
- **L'entità dell'errore si può valutare convertendo il risultato in base dieci**

$$N_F = 0.8435$$

$$N_{F16}^1 = 0.D7EF_{16}$$

$$N_{F10}^1 = D \cdot 16^{-1} + 7 \cdot 16^{-2} + E \cdot 16^{-3} + F \cdot 16^{-4} = 0.8434906006$$

$$\Delta = N_F - N_{F10}^1 = 0.8435 - 0.8434906006 = 0.0000093994$$

A.S.E.

3.41

## Osservazione

- **È vera la seguente uguaglianza**

$$N = N \cdot \frac{b_{1(b_1)}^m}{b_{1(b_2)}^m}$$

- **Quindi**

- **Per convertire da  $b_1$  a  $b_2$  un numero frazionario lo si può moltiplicare per  $b_{1(b_1)}^m$ , effettuare la conversione con il metodo delle divisioni successive e quindi dividere il risultato per  $b_{1(b_2)}^m$**

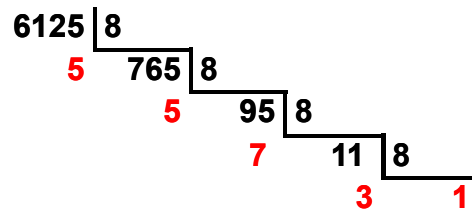
A.S.E.

3.42

## Esempio 1

- Convertire il numero 61.25 da base 10 a base 8

- Risulta  $m=2$ , quindi si moltiplica per  $10^2=100$



- Il risultato si divide per  $10^2_{(10)} = 144_{(8)}$ , quindi risulta

- $N = 13755 / 144 = 75.2$

– *N.B.* la divisione è fatta in base 8

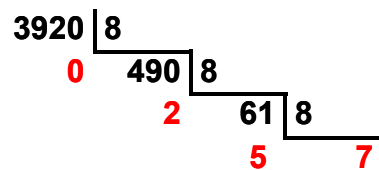
A.S.E.

3.43

## Esempio 2

- Convertire il numero 61.25 da base 10 a base 8

- Si moltiplica per una potenza di 8 (p.e  $8^2 = 64$ )



- Il risultato si divide per  $8^2_{(10)} = 100_{(8)}$ , quindi risulta

- $N = 7520 / 100 = 75.2$

– *N.B.* la divisione è fatta in base 8

A.S.E.

3.44

## Binario => Ottale

- **Dato un numero binario**

$$N = \dots d_8 d_7 d_6 d_5 d_4 d_3 d_2 d_1 d_0 . d_{-1} d_{-2} d_{-3} =$$

$$= \dots d_8 2^8 + d_7 2^7 + d_6 2^6 + d_5 2^5 + d_4 2^4 + d_3 2^3 + d_2 2^2 + d_1 2^1 + d_0 2^0 +$$

$$+ d_{-1} 2^{-1} + d_{-2} 2^{-2} + d_{-3} 2^{-3}$$

- **Fattorizzando**

$$(d_8 2^2 + d_7 2^1 + d_6 2^0) 2^6 + (d_5 2^2 + d_4 2^1 + d_3 2^0) 2^3 +$$

$$+ (d_2 2^2 + d_1 2^1 + d_0 2^0) 2^0 + (d_{-1} 2^2 + d_{-2} 2^1 + d_{-3} 2^0) 2^{-3} =$$

$$(d_8 2^2 + d_7 2^1 + d_6 2^0) 8^2 + (d_5 2^2 + d_4 2^1 + d_3 2^0) 8^1 +$$

$$+ (d_2 2^2 + d_1 2^1 + d_0 2^0) 8^0 + (d_{-1} 2^2 + d_{-2} 2^1 + d_{-3} 2^0) 8^{-1}$$

A.S.E.

3.45

## Metodo

- **Basta raggruppare i digit del numero binario (bit) tre a tre e convertire ciascun gruppo nel corrispondente digit ottale**

- **Esempio**

1101011010110111.10011101

$\langle 001 \rangle \langle 101 \rangle \langle 011 \rangle \langle 010 \rangle \langle 110 \rangle \langle 111 \rangle . \langle 100 \rangle \langle 111 \rangle \langle 010 \rangle =$

153267.472

- **Nota** Sono stati aggiunti degli zeri in testa e in coda affinché si avessero due gruppi di digit multipli di tre

A.S.E.

3.46

## Binario => Esadecimale

- Stesso procedimento del caso precedente, però ora si raggruppano i bit quattro a quattro

- **Esempio**

1101011010110111.10011101

$\langle 1101 \rangle \langle 0110 \rangle \langle 1011 \rangle \langle 0111 \rangle . \langle 1001 \rangle \langle 1101 \rangle =$

D6B7.9D

- Per le conversioni ottale => binario e esadecimale => binario si opera in modo simile convertendo ciascun digit nel corrispondente numero binario

A.S.E.

3.47

## Ottale => Esadecimale (Esadecimale => Ottale)

- Conversione intermedia in binario

- **Esempio**

– Ottale => Esadecimale

$7523_8 = (111)(101)(010)(011) =$

$= \langle 1111 \rangle \langle 0101 \rangle \langle 0011 \rangle = F53_{16}$

– Esadecimale => Ottale

$9F3C_{16} = (1001)(1111)(0011)(1100) =$

$= \langle 001 \rangle \langle 001 \rangle \langle 111 \rangle \langle 100 \rangle \langle 111 \rangle \langle 100 \rangle = 117474_8$

A.S.E.

3.48

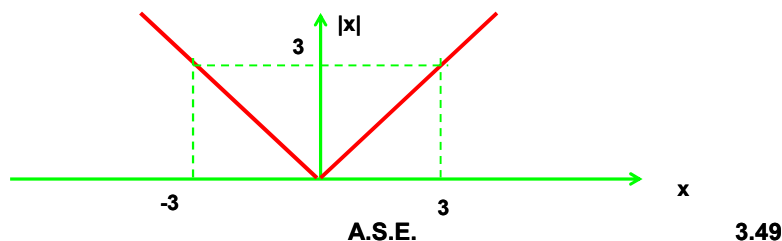


## Modulo

- Il modulo di un numero è il valore assoluto del numero stesso

– si indica con due barre verticali  $|N|$

- **Risulta:**  $|X| = X$  se  $X > 0$  e  $|X| = -X$  se  $X < 0$
- **Esempio**  $|27| = 27$ ;  $|-31| = 31$ ;  $|2.7| = 2.7$ ;  $|-0.531| = 0.531$
- **Graficamente si ha:**



## Osservazione

- Dati due numeri arbitrari  $X$  e  $Y$ , con  $Y \neq 0$ , allora

$$X = Q \cdot Y + R, \quad 0 \leq R < |Y|$$

- Se  $R = 0$  allora  $X$  è divisibile per  $Y$
- Si può dimostrare che  $R$  e  $Q$  esistono e sono unici
- **Esempi**

$$X=19, Y=7 \Rightarrow Q=2, R=5$$

$$X=19, Y=-7 \Rightarrow Q=-2, R=5$$

$$X=-19, Y=7 \Rightarrow Q=-3, R=2$$

$$X=-19, Y=-7 \Rightarrow Q=3, R=2$$

$$X=-35, Y=-7 \Rightarrow Q=5, R=0$$

A.S.E.

3.50

## Modulo “M” (1)

- “X” modulo “M” è il “resto” della divisione di “X” diviso “M” (intero positivo); si indica con due barre verticali e pedice M

$$R = |X|_M$$

- “R” è detto anche residuo e risulta

$$X = [X / M] \cdot M + |X|_M$$

- Esempio

Intero  $\leq$  di X diviso M

$$|25|_7 = 4 ; |25|_{10} = 5 ; |-25|_7 = 3 ; |124.24|_3 = 1.24 ; |124.24|_{10} = 4.24$$

A.S.E.

3.51

## Modulo “M” (2)

- Altra interpretazione: dato un numero X e detto R il modulo “M” di X
- 1° caso  $0 \leq X < M$  segue  $R = X$
- 2° caso  $X \geq M$  si toglie tante volte M in modo che risulti  $0 \leq R < M$
- 3° caso  $X \leq 0$  si somma tante volte M in modo che risulti  $0 \leq R < M$

A.S.E.

3.52

## Alcune proprietà

- Dati due numeri  $X$  e  $Z$  risulta

$$|X \pm Z|_M = \left| |X|_M \pm |Z|_M \right|_M$$

$$|X + KM|_M = |X|_M$$

$$|X \cdot Z|_M = \left| |X|_M \cdot |Z|_M \right|_M$$

A.S.E.

3.53

## Conclusioni

- Aritmetica binaria
- Conversione da base “N” a base 10
- Conversione da base 10 a base “N”
- Modulo
- Modulo “M”

A.S.E.

3.54