La cosa da verificare (o da decidere che è falsa)

$$\frac{\pi}{12} > \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

$$\alpha > 2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$ dove $$\alpha = \left(\frac{\pi}{12}\right)^2$$

$$(2 - \alpha)^2 < 2 + \sqrt{3}$$

$$(2 - \alpha)^2 - 2 < \sqrt{3}$$

$$\alpha^2 - 4\alpha + 2 < \sqrt{3}$$

$$\alpha^4 - 8\alpha^3 + 20\alpha^2 - 16\alpha + 1 < 0$$

derivata

$$f' = 4\alpha^3 - 24\alpha^2 + 40\alpha - 16$$

in 0 è negativa, in 1/4 è negativa, in 1/2 è negativa
in 1 è positiva

Quindi nell'intorno di 1/16 è negativa, cioè il polinomio decresce all'aumentare di alfa.

$$\pi^2 \simeq 3,14 \times 3,14 = 9,8596$$

$$\alpha \simeq 1/16 + 0,8596/144$$

$$\alpha \simeq 1/16 + 0,096/16 = 1/16 + 6/1000$$

ora sostituisco questo valore nel polinomio; alfa approssimato è minore dell'alfa vero (essendo partito da 3,14) ma se il polinomio è negativo per questo valore, lo sarà pure per un alfa leggermente maggiore, vista la derivata.

$$\alpha^2(\alpha^2 - 8\alpha + 20) + 1 - 16\alpha < 0$$

$$1 - 16\alpha = -96/1000$$

Al posto della parentesi posso mettere 20, che è molto maggiore degli altri 2 termini

$$20\alpha^2 = 20(1/256 + 12/16000 + 36/1000000) = 80/1024 + 15/1000 + 0,72/1000$$

Approssimando 1024 con 1000 non arrivo comunque a 96/1000 quindi il polinomio è negativo.