L'ellissi

Definizione

L'ellisse è il luogo geometrico dei punti per cui è costante la somma delle distanze da due punti assegnati, detti fuochi.

Proprietà geometriche

Consideriamo un'ellisse con fuochi $F_1(c, 0)$ e $F_2(-c, 0)$.
Chiamiamo $2d$ la somma delle distanze dei punti dell'ellisse dai fuochi. Dovrà essere $d > c$, altrimenti il luogo geometrico sarà l'insieme vuoto. Se prendiamo in considerazione il punto dell'ellisse $A(a, 0)$ appartenente al semiasse positivo dell'asse delle x abbiamo:

$$(a-c)+(a+c)=2d \tag{1}$$

$$a=d \tag{2}$$

Se ora consideriamo $B(0, b)$ appartenente al semiasse positivo dell'asse delle y, e scriviamo anche per B la condizione di appartenenza all'ellisse, sfruttando il teorema di Pitagora e l'uguaglianza (2) tra semiasse maggiore e semisomma delle distanze dai fuochi, otteniamo:

$$a^2-c^2=b^2 \tag{3}$$

Equazione

Direttamente dalla definizione possiamo scrivere l'equazione di un'ellisse con i fuochi sull'asse delle ascisse, con coordinate $F_1(c, 0)$ e $F_2(-c, 0)$.

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a \tag{4}$$

Proviamo a eliminare i radicali eseguendo il quadrato di entrambi i membri dell'eguaglianza. Prima però modifichiamo l'espressione in modo da avere un radicale per ciascun membro: in questo modo, dopo aver fatto il quadrato, molti termini si elimineranno a vicenda.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2} \tag{5}$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2+(x-c)^2+y^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \tag{6}$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx \tag{7}$$

Eliminiamo anche l'ultimo radicale, facendo ancora una volta il quadrato di entrambi i membri.
Ricordiamo la relazione che lega la semidistanza tra i fuochi c ai due semiassi maggiore a e minore b.

$$a^2(x^2+c^2-2cx)^2+a^2y^2=a^4+c^2x^2-2a^2cx \tag{8}$$

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \tag{9}$$

Possiamo scrivere la stessa equazione dividendo ambo i membri per il secondo di essi. In questo modo si ottiene:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (10)$$

Tangente all'ellisse

Per l'ellisse definita dall'equazione (10) ci poniamo il problema di trovare la retta tangente in un suo punto $T(x_0, y_0)$. In virtù dell'appartenenza all'ellisse, possiamo scrivere:

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1 \qquad (11)$$

Sottraendo membro a membro la (10) e la (11) otteniamo una nuova formulazione dell'equazione dell'ellisse, che evidenzia il passaggio dal punto *T*.

$$\frac{x^2-x_0^2}{a^2}+\frac{y^2-y_0^2}{b^2}=0 \qquad (12)$$

$$\frac{(x-x_0)(x+x_0)}{a^2}+\frac{(y-y_0)(y+y_0)}{b^2}=0 \qquad (13)$$

Individuiamo il generico fascio di rette passante per il punto *T*:

$$y-y_0=m(x-x_0) \qquad (14)$$

Intersechiamo ora l'ellisse con il fascio, eliminando la *y* dall'equazione dell'ellisse e troviamo il valore di m per cui entrambe le soluzioni coincidono con x_0.

$$\frac{(x-x_0)(x+x_0)}{a^2}+\frac{m(x-x_0)(y-y_0+2\,y_0)}{b^2}=0 \qquad (15)$$

Semplifichiamo considerando la prima soluzione ovvia $x = x_0$.

$$b^2(x+x_0)+a^2 m^2(x-x_0)+2\,a^2 m\,y_0=0 \qquad (16)$$

Cerchiamo ora il valore di *m* per cui questa equazione ha pure un'altra soluzione $x = x_0$. Cioè sostituendo $x = x_0$ l'equazione deve diventare un'identità.

$$2\,b^2 x_0+2\,a^2 m\,y_0=0 \qquad (17)$$

Da cui si ricava

$$m=-\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} \qquad (18)$$

Proprietà ottica dell'ellisse

I fuochi dell'ellisse godono di una interessante proprietà: un raggio che parte da uno dei due fuochi, dopo essere stato riflesso dalla superficie dell'ellissi, passerà dall'altro fuoco.
Per dimostrare l'esistenza di questa proprietà, dobbiamo trovare l'angolo tra la retta che congiunge uno dei due fuochi a un generico punto dell'ellisse e la tangente all'ellisse nello stesso punto e verificare che è uguale a quello formato tra la medesima tangente e la retta che congiunge il punto all'altro fuoco.
Anziché lavorare direttamente con gli angoli, ci conviene usare le tangenti degli angoli stessi, visto che il coefficiente angolare di una retta esprime proprio il valore della tangente dell'angolo formato con l'asse *x*. Quindi la tangente *p* dell'angolo α_p tra due rette di cui è noto il coefficiente angolare *q* e *r* può

essere trovato come

$$p=\tan(\alpha_p)=\tan(\alpha_q-\alpha_r)=\frac{\sin(\alpha_q)\cos(\alpha_r)-\cos(\alpha_q)\sin(\alpha_r)}{\cos(\alpha_q)\cos(\alpha_r)+\sin(\alpha_q)\sin(\alpha_r)}=\frac{q-r}{1+qr}$$

Applichiamo quindi questa formula per trovare l'angolo tra la tangente all'ellisse in T, il cui coefficiente angolare è proprio il valore m della formula (18) e quello della congiungente F_1 con T.
In questo caso quindi è

$$q=-\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} \quad \text{e} \quad r=\frac{y_0}{x_0-c}$$

e pertanto

$$p=\frac{-b^2 x_0(x_0-c)-a^2 y_0^2}{a^2 y_0(x_0-c)-b^2 x_0 y_0}=\frac{-a^2 b^2+b^2 c x_0}{x_0 y_0 c^2-a^2 c y_0}=\frac{b^2}{c y_0}$$

Per la linea che congiunge T con l'altro fuoco F_2 si ha invece:

$$q=-\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} \quad \text{e} \quad r=\frac{y_0}{x_0+c}$$

e pertanto

$$p=\frac{-b^2 x_0(x_0+c)-a^2 y_0^2}{a^2 y_0(x_0+c)-b^2 x_0 y_0}=\frac{-a^2 b^2-b^2 c x_0}{x_0 y_0 c^2+a^2 c y_0}=-\frac{b^2}{c y_0}$$

quindi si vede come effettivamente i due raggi, incidente e riflesso, formano come previsto un angolo uguale e opposto con la tangente.