Soluzione delle equazioni di terzo grado in forma chiusa

Riflessione 01/03; 08/15
Roberto Roncella

Metodologia

- Eliminazione del coefficiente di secondo grado tramite sostituzione di variabile
- Studio del polinomio e individuazione delle condizioni per avere 1 o 3 soluzioni reali
- Introduzione di un grado di libertà tramite sostituzione della nuova variabile con la somma di due altre variabili
- Riconduzione delle soluzioni dell'equazione a quelle di un sistema costruito spezzando l'equazione in due opportune condizioni
- Soluzione definitiva con discussione della natura del risultato

Eliminazione del termine di secondo grado

Si parte da un'equazione nella forma generale:

$$x^3+ax^2+bx+c=0 \qquad (1)$$

Si può assumere tranquillamente

$$c\neq 0 \qquad (2)$$

altrimenti almeno una delle soluzioni sarebbe nulla e si potrebbe abbassare il grado dell’equazione. Si può eseguire ora la sostituzione:

$$x=y+k \qquad (3)$$

Si ottiene

$$y^3+3k\,y^2+3k^2\,y+k^3+a(y^2+2k\,y+k^2)+b(y+k)=0 \qquad (4)$$

$$y^3+(3k+a)y^2+(3k^2+2k\,a+b)\,y+k^3+a\,k^2+b\,k+c=0$$

Ponendo

$$k=-\frac{a}{3} \qquad (3)$$

Si ottiene una nuova equazione di terzo grado in cui non c'è più il termine di secondo grado. La sostituzione è sempre possibile. Ora si deve risolvere:

$$y^3+\hat{b}\,y+\hat{c}=0 \qquad (1)$$

I nuovi coefficienti sono:

$$\hat{b}=3k^2+2k\,a+b=-\frac{1}{3}a^2+b$$

$$\hat{c}=k^3+a\,k^2+b\,k+c=\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c$$

Assumiamo anche qui che sia

$$\hat{c} \neq 0 \qquad (2)$$

altrimenti si avrebbe la soluzione banale con *y* nullo e si potrebbe ridurre il grado dell'equazione.

Studio del polinomio

Sicuramente l'equazione nella forma semplificata trovata ammette almeno una soluzione reale. Infatti, detto *P*(*y*) il polinomio che costituisce il primo membro dell'equazione,

$$P(y) = y^3 + \hat{b}\, y + \hat{c} \qquad (4)$$

si hanno le 2 condizioni

$$\lim_{y \to -\infty} P(y) = -\infty \qquad (4)$$

$$\lim_{y \to \infty} P(y) = \infty$$

che, data la continuità del polinomio, implicano la presenza di almeno 1 attraversamento dello 0. Inoltre lo studio delle derivate prima e seconda permette di identificare la presenza di un eventuale massimo e minimo relativo e di collocarli nel dominio.

$$P_1(y) = 3\, y^2 + \hat{b} \qquad (4)$$

$$P_2(y) = 6\, y \qquad (4)$$

La cubica ha sempre un flesso in 0. Se il coefficiente del termine di primo grado è positivo, la cubica è sempre crescente e c'è un'unica soluzione reale.
Altrimenti si ha una successione crescente-decrescente-crescente, con un massimo relativo seguito da un minimo relativo.
I valori per cui si annulla la derivata prima sono

$$y_{\max} = -\sqrt{-\frac{\hat{b}}{3}} \qquad (4)$$

$$y_{\min} = \sqrt{-\frac{\hat{b}}{3}} \qquad (4)$$

Il valore di massimo e minimo sono

$$P_{\max} = 2\sqrt{-\frac{\hat{b}^3}{27}} + \hat{c} \qquad (4)$$

$$P_{\min} = -2\sqrt{-\frac{\hat{b}^3}{27}} + \hat{c} \qquad (4)$$

In questo caso la condizione per cui si hanno tutte e 3 le soluzioni reali è

$$-2\sqrt{-\frac{\hat{b}^3}{27}} \leq \hat{c} \leq 2\sqrt{-\frac{\hat{b}^3}{27}} \qquad (4)$$

altrimenti si ha 1 soluzione reale e 2 complesse coniugate. Nel diagramma cartesiano in figura 1 è mostrata la discussione sulle radici dell'equazione in funzione dei valori dei coefficienti.

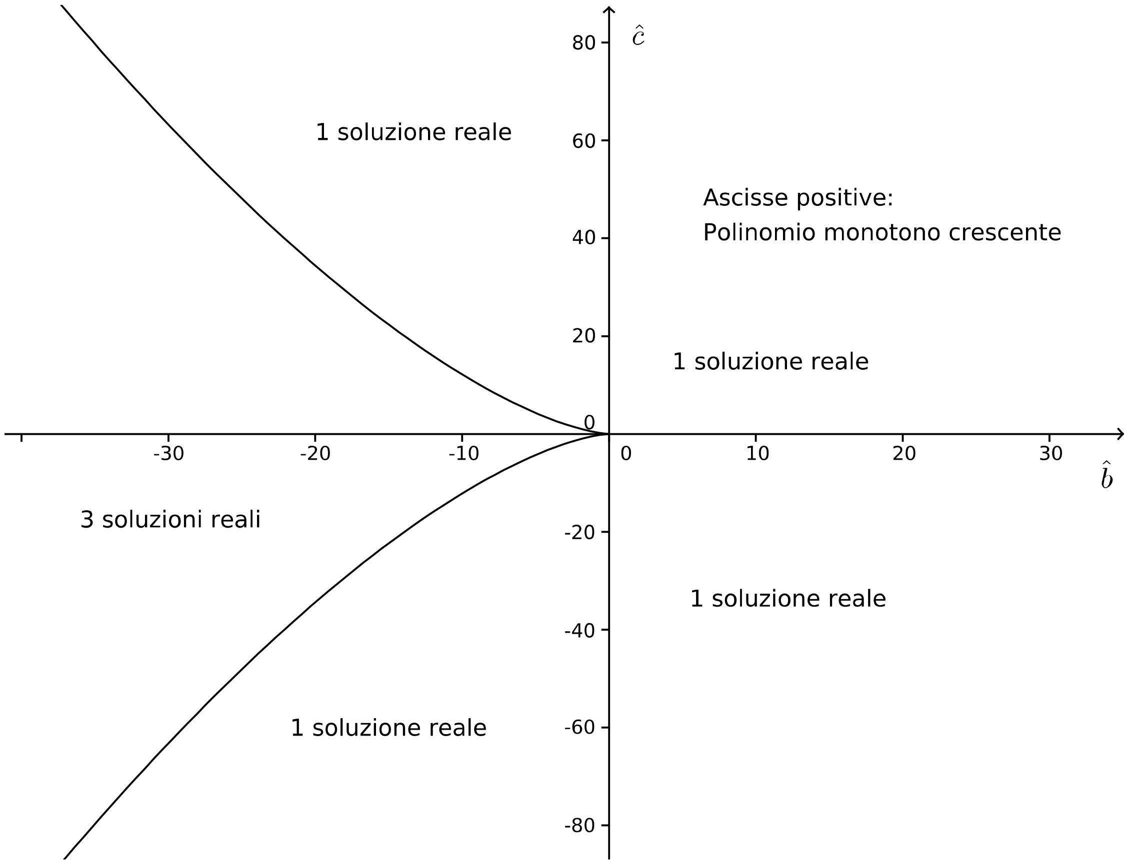

Figura 1: discussione sulle radici dell'equazione di terzo grado semplificata in funzione dei coefficienti.

Introduzione di nuove variabili

Si può sostituire ancora la nuova variabile *y* con la somma di 2 nuove variabili. In questo modo si aggiunge un grado di libertà, che potrà essere giocato per semplificare l'equazione ottenuta e spezzarla in 2 condizione da soddisfare contemporaneamente. Si ha:

$$y=u+v \tag{4}$$

Ora si deve risolvere:

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+\hat{b}(u+v)+\hat{c}=0 \quad (1)$$

che possiamo spezzare arbitrariamente in un sistema di 2 equazioni

$$u^3+v^3+\hat{c}=0 \quad (1)$$

$$3uv(u+v)+\hat{b}(u+v)=0 \quad (1)$$

La seconda equazione si può semplificare, visto che abbiamo sicuramente escluso la soluzione con *y* nulla. Otteniamo un sistema nelle 2 incognite u e v che può essere ricondotto al problema classico della determinazioni di variabili di cui sia nota la somma e il prodotto.
Si ha pertanto

$$u^3+v^3+\hat{c}=0 \quad (1)$$

$$3uv+\hat{b}=0 \qquad (1)$$

Si ha facilmente, portando al membro di destra i termini costanti ed elevando al cubo la seconda equazione:

$$u^3+v^3=-\hat{c} \qquad (1)$$

$$u^3 v^3=-\frac{1}{27}\hat{b}^3 \qquad (1)$$

L'elevazione al cubo del prodotto *uv* serve a ricondurre il sistema al calcolo di due variabili di cui sono noti somma e prodotto. In questo modo si introducono – almeno in campo complesso - ulteriori soluzioni (il sistema diventa di grado 9) per cui è bene ricordare che il prodotto delle soluzioni *uv* deve essere un numero reale. La soluzione del sistema può ottenersi facendo riferimento all'equazione di secondo grado

$$t^2+\hat{c}\,t-\frac{1}{27}\hat{b}^3=0 \qquad (1)$$

Le soluzioni sono reali se il discriminante non è negativo

$$\Delta=\hat{c}^2+\frac{4}{27}\hat{b}^3\geq 0 \qquad (1)$$

In questo caso abbiamo trovato per *y* una soluzione reale e, per studiare le altre 2 soluzioni, possiamo abbassare il grado dell'equazione. La soluzione trovata per l'equazione originaria è quindi

$$y=\sqrt[3]{\frac{-\hat{c}+\sqrt{\Delta}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-\hat{c}-\sqrt{\Delta}}{2}} \qquad (1)$$

$$x=y-\frac{a}{3} \qquad (1)$$

Possiamo osservare che la condizione sul discriminante positivo è la stessa che porta a 1 sola soluzione reale: quindi quella appena trovata è l'unica soluzione reale dell'equazione. Abbassando il grado dell'equazione si troverà un trinomio di secondo grado che non ammette zeri reali.

Il caso delle 3 soluzioni reali

Per completare la trattazione, resta da considerare il caso in cui si hanno 3 soluzioni reali, in cui l'artifizio della sostituzione porta a un discriminante negativo e quindi a soluzioni per *u* e *v* complesse coniugate.
Per arrivare all'espressione delle 3 soluzioni si può procedere passando al campo complesso e ricordando che la radice cubica si ottiene facilmente quando i valori sono espressi in notazione polare. Quindi

$$u^3=\frac{-\hat{c}+\mathrm{j}\sqrt{|\Delta|}}{2}=\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta+2k\pi)} \qquad (1)$$

$$v^3=\frac{-\hat{c}-\mathrm{j}\sqrt{|\Delta|}}{2}=\rho\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\theta+2k\pi)}$$

dove

$$\rho=\sqrt{-\frac{\hat{b}^3}{27}} \qquad (1)$$

$$\theta=\arctan\left(-\frac{\sqrt{|\Delta|}}{\hat{c}}\right)=\arctan\left(-\frac{1}{\hat{c}}\sqrt{-\hat{c}^2-\frac{4}{27}\hat{b}^3}\right)$$

A partire da questi valori, si possono ricavare *u* e *v* estraendo le radici cubiche e scrivere le 3 radici dell'equazione. Occorre ricordare che i valori di *u* e *v* da sommare sono quelli che danno prodotto reale.

$$u=\sqrt[3]{(\rho)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{(\theta+2k\pi)}{3}} \qquad (1)$$

$$v=\sqrt[3]{(\rho)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{(\theta+2k\pi)}{3}} \quad \text{con k = 0, 1 e 2}$$

Si ha per le soluzioni

$$y=\sqrt[3]{(\rho)}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{(\theta+2k\pi)}{3}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{(\theta+2k\pi)}{3}}\right) \quad \text{con k = 0, 1 e 2} \qquad (1)$$

e espandendo nelle singole radici

$$y_1=2\sqrt{-\frac{\hat{b}}{3}}\cos\frac{\theta}{3} \qquad (1)$$

$$y_2=2\sqrt{-\frac{\hat{b}}{3}}\cos\frac{(\theta+2\pi)}{3} \qquad (1)$$

$$y_3=2\sqrt{-\frac{\hat{b}}{3}}\cos\frac{(\theta+4\pi)}{3} \qquad (1)$$